pacorabadan.com

8. Números Índices

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

DR. FRANCISCO RABADÁN PÉREZ

Índice

1. La Problemática de la comparación

Objetivo: comparar una serie de observaciones respecto de una situación inicial, fijada de forma arbitraria.

El subíndice (i) indica el instante del tiempo

Comparar por cociente tiene la ventaja de solucionar el problema de las distintas unidades de medida

Comparar (X cuantitativa)

- Por diferencia

$$D = x_1 - x_0 \begin{cases} x_1 - x_0 > 0 \rightarrow x_1 > x_0 \\ x_1 - x_0 = 0 \rightarrow x_1 = x_0 \\ x_1 - x_0 < 0 \rightarrow x_1 < x_0 \end{cases}$$

- Por cociente (adimensional)

$$C = \frac{x_1}{x_0} = \begin{cases} C > 1 \rightarrow x_1 > x_0 \\ C = 1 \rightarrow x_1 = x_0 \\ C < 1 \rightarrow x_1 < x_0 \end{cases}$$

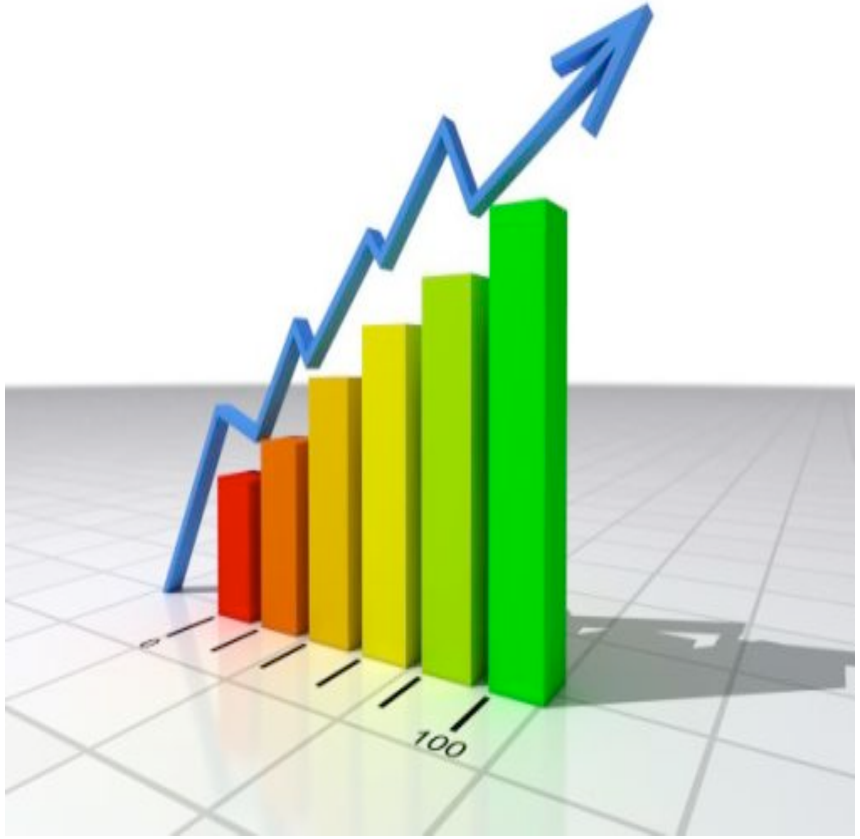
1. La Problemática de la comparación

¿Qué debemos tener en cuenta para comparar. ?

- Fijar una situación inicial
  - Va a condicionar el resultado de la comparación.
  - Lo más adecuada posible respecto del objetivo
- Problema:
  - Agregación de Magnitudes
  - Sistemas de comparación adecuados
- Qué comparamos
  - Magnitudes simples
  - Magnitudes complejas
    agregación de Magnitudes Simples
    - ¿unidad medida?
    - unificar en precio
      Construir índices

2. Números índices simples y complejos

Definición: Un número índice es una medida estadística que nos permite estudiar los cambios que se producen en una magnitud simple o compleja con respecto al tiempo o al espacio (Martín-Pliego, 2011; pág. 377).



Conceptos asociados:

- **Periodo Base o de Referencia**: periodo inicial
- **Periodo actual o corriente**: periodo que queremos comparar

2.1. Números índices simples

Índices Simples

$$I_i = I_o^t(i) = \frac{x_{it}}{x_{i0}}$$

- **I_i** mide la variación, <u>en tanto por uno</u>, que ha sufrido la magnitud **x_i** entre los dos periodos considerados.

- X: magnitud simple
- x_{i0}: valor en periodo base
- x_{it}: valor en periodo de comparación

Los mas usuales

Precio Relativo

$$p_0^t = \frac{p_{it}}{p_{i0}}$$

Cantidad Relativa

$$q_0^t = \frac{q_{it}}{q_{i0}}$$

Valor relativo

$$V_0^t = \frac{p_{it}q_{it}}{p_{i0}q_{i0}} = p_0^t q_0^t$$

los índices suelen expresarse en %
(multiplicando el tanto por uno por cien)

2.2. Números índices complejos

La realidad:

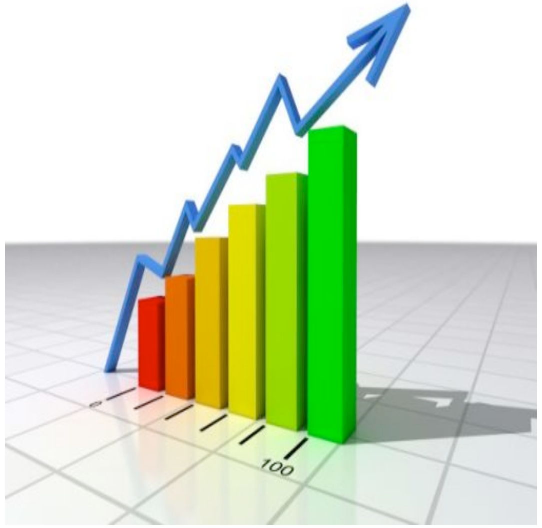
- *no estamos interesados en bienes individuales sino en magnitudes que se pueden expresar como precio por cantidad*
- *Buscamos ver la evolución de un conjunto de bienes-servicios (Cesta)*

El índice complejo

- Resume varios índices simples.

El problema del IPC:

- **Objetivo**: *describir el coste de la vida.*
- **Modo**:
  - Elegimos un grupo de bienes representativo
  - Les damos una ponderación (importancia relativa)
  - Decidimos el mejor modo de unificar esta información.

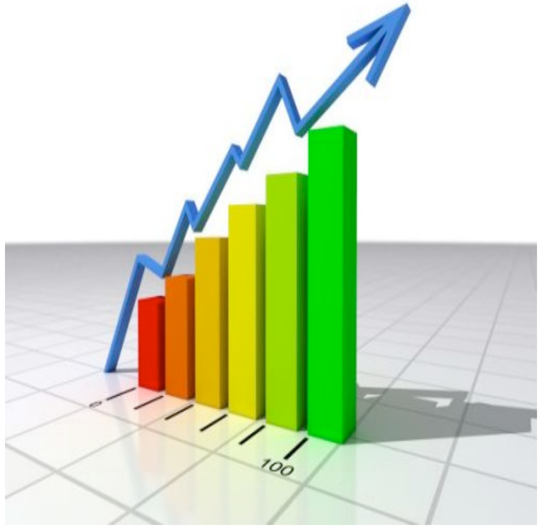


Objetivo de los NIC (Coste de oportunidad): índice lo mas sencillo posible **vs.** mayor cantidad posible de información.

2.2. Números índices Complejos

Tipología

- **Números índices complejos**
  - **No Ponderados**
    - De índices simples
      - Media aritmética
      - Media geométrica
      - Media armónica
    - Índice media agregativa
  - **Ponderados**
    - de índices simples
      - Media aritmética
      - Media geométrica
      - Media armónica
    - Media agregativa



Objetivo de los NIC: Encontrar un número índice lo mas sencillo posible **vs.** que ofrezca la mayor cantidad posible de información.

2.2. Números índices complejos

Índices Complejos no ponderados

De índices simples

Media aritmética

$$\bar{I} = \frac{\sum_{i=1}^{n} I_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_{it}}{x_{i0}}}{N}$$

Media Geométrica

$$I_G = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{n} I_i} \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{n} \frac{x_{it}}{x_{i0}}}$$

Media Armónica

$$I_H = \frac{N}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{I_i}} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i0}}{x_{it}}}$$

Media Agregativa

$$I_A = \frac{x_{1t}+x_{2t}+..+x_{nt}}{x_{10}+x_{20}+..+x_{n0}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{it}}{\sum_{i=1}^{n} x_{i0}}$$

2.2. Números índices complejos

Índices Complejos ponderados

De índices simples

Media aritmética

$$\bar{I}^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} I_i\, w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

Media Geométrica

$$\mathbf{I_G}^* = \sqrt[\sum_{i=1}^{n} w_i]{\prod_{i=1}^{n} \mathbf{I_i}^{w_i}}$$

Media Armónica

$$I_H{}^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{I_i}}$$

Media Agregativa

$$I_A{}^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{it} w_i}{\sum_{i=1}^{n} x_{i0}\, w_i}$$

2.3. Números índices: propiedades

I. Existencia	• I debe existir con valor finito y distinto de cero (Problemas en I_G e I_A)
II. Identidad	• Si se hace coincidir el periodo base y el actual el índice debe ser igual a la unidad
III. Inversión:	• El producto de dos índices con base y periodos corriente iguales, pero invertidos debe ser 1
IV. Circularidad	• Principio de índices encadenados
V. Proporcionalidad	• Si en el periodo actual todas las magnitudes sufren una variación proporcional, el índice queda afectado en la misma variación.

$\boxed{I_t^t=1}$

$\boxed{I_t^0 = \frac{1}{I_0^t} \rightarrow I_t^0 I_0^t=1}$

$\boxed{I_0^t * I_t^{t'}=I_0^{t'}}$

$\boxed{Y = x + k \rightarrow I_{yt}^{t'} = (1+k)I_{xt}^{t'}}$

3. Índices complejos de precios no ponderados

Índices de Precios complejos <u>no ponderados</u>

- **Sauerbeck**
  - **Media aritmética de los precios relativos**

$$S_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} I_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{p_{it}}{p_{i0}}}{N}$$

- **Bradstreet-Dûtot**
  - **Media Agregativa sin ponderar de los precios**

$$B - D_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0}}$$

$$I_t = \frac{p_{it}}{p_{i0}}$$

Índices de precios relativos

- **Ventajas**: fácil cálculo
- **Desventajas**: no tienen en cuenta la importancia relativa de cada uno de los diferentes bienes en el conjunto total.

3. Índices complejos de precios no ponderados

Bienes	Precios		
	2012	2013	2014
Pan	0,3	0,32	0,35
Leche	0,8	0,84	0,89
Huevos	2,0	2,20	2,35
Carne	9,0	11,00	12,50
Sum(p)	**12,1**	**14,36**	**16,09**

Bienes	P_{2012}^{2012}	P_{2012}^{2013}	P_{2012}^{2014}
Pan	100	0,32/0,30=1,066	0,35/0,30=1,166
Leche	100	0,84/0,80=1,05	0,89/080=1,1125
Huevos	100	2,20/2=1,10	2,35/2=1,175
Carne	100	11/9=1,222	12,5/9=1,388
		4,438	**4,843**

Bradstreet-Dûtot (Ind. Media agregativa)

$$B-D_{p2012}^{2013}=\frac{\sum_{i=1}^{4} p_i(2013)}{\sum_{i=1}^{4} p_i(2012)}=\frac{14,36}{12,10}=118{,}68\%$$

$$B-D_{p2012}^{2014}=\frac{\sum_{i=1}^{4} p_i(2014)}{\sum_{i=1}^{4} p_i(2012)}=\frac{16,09}{12,10}=132{,}98\%$$

Sauerbeck (Ind. Media aritmética)

$$S_{2012}^{2013}=\frac{\sum_{i=1}^{4}\frac{p_i(2013)}{p_i(2012)}}{4}=\frac{4,438}{4}=110{,}97\%$$

$$S_{2012}^{2014}=\frac{\sum_{i=1}^{4}\frac{p_i(2014)}{p_i(2012)}}{4}=\frac{4,843}{4}=121{,}07\%$$

(Martín-Pliego,2011;pág. 385)

3. índices complejos de precios ponderados

Índices de Precios complejos ponderados

Laspeyres

Ponderación

$$w_i = p_{i0}q_{i0}$$

$$L_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} I_i w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{p_{it}}{p_{i0}} p_{i0}q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0}q_{i0}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it}q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0}q_{i0}}$$

Paasche

Ponderación

$$w_i = p_{i0}q_{it}$$

$$P_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} I_i w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{p_{it}}{p_{i0}} p_{i0}q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0}q_{it}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it}q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0}q_{it}}$$

Edgeworth

(media agregativa de precios)

Ponderación

$$w_i = q_{i0} + q_{it}$$

$$E_P = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it}w_i}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0}w_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it}(q_{i0}+q_{it})}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0}(q_{i0}+q_{it})}$$

Ideal de Fisher

(geométrica de Laspeyres y Paasche)

$$I_G = \sqrt{L_p P_p}$$

IMPORTANTE

3. índices complejos de precios ponderados

Bienes	Cantidad Vendida	
	2012	2014
Pan	200	275
Leche	500	530
Huevos	800	925
Carne	400	375

Bienes	$P_{i12}q_{i12}$	$p_{i14}q_{i12}$	$p_{i14}q_{i14}$	$p_{i12}q_{i14}$	$Q_i=q_{i12}+q_{i14}$	$p_{i14}Q_i$	$p_{i12}Q_i$
Pan	60	70	96,25	82,5	475	166,25	142,5
Leche	400	445	471,7	424	1030	916,70	824
Huevos	1600	1880	2173,75	1850	1725	4053,75	3450
Carne	3600	5000	4687,5	3375	775	9687,5	6975
	5660	7395	7429,2	5731,5		**14824,2**	**11391,5**

Precios	2012	2014	P_{2012}^{2013} (%)	P_{2012}^{2014}(%)
Pan	0,3	0,35	106,6	116,6
Leche	0,8	0,89	105	111,25
Huevos	2	2,35	110	117,5
Carne	9	12,50	122,2	138,8

$$L_{p12}^{14} = \frac{\sum_{i=1}^{4} p_{i14}q_{i12}}{\sum_{i=1}^{4} p_{i12}q_{i12}} = \frac{7395}{5660} = 130,65\%$$

Aritmética ponderada $w=p_{i0}q_{i0}$

$$P_{p12}^{14} = \frac{\sum_{i=1}^{4} p_{i14}q_{i14}}{\sum_{i=1}^{4} p_{i12}q_{i14}} = \frac{7429,20}{5731,5} = 129,62\%$$

Aritmética ponderada $w=p_{i0}q_{it}$

$$E_{p12}^{14} = \frac{\sum_{i=1}^{4} p_{i14}(q_{i12}+q_{i14})}{\sum_{i=1}^{4} p_{i12}(q_{i12}+q_{i14})} = \frac{14824,2}{11391,5} = 130,1339\%$$

Agregativa $w=q_{i0}+q_{it}$

$$F_{p12}^{14} = \sqrt{L_{p12}^{14}P_{p12}^{14}} = \sqrt{130,65 * 129,62} = 130,1361\%$$

IMPORTANTE

(Martín-Pliego,2011;pág. 389-390)

3. Números índices: propiedades

Índice	Existencia	Identidad	Inversión	Proporcionalidad
Sauerbeck $S_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} I_i}{N}$	OK	OK	~~OK~~	OK
Bradstreet-Dûtot $B - D_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0}}$	OK	OK	OK	OK
Laspeyres $L_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}}$	OK	OK	~~OK~~	OK
Paasche $P_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}}$	OK	OK	~~OK~~	Objeción Económica
Edgeworth $E_P = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it}(q_{i0} + q_{it})}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0}(q_{i0} + q_{it})}$	OK	OK	OK	Objeción Económica
Fisher $I_G = \sqrt{L_p P_p}$	OK	OK	OK	Objeción Económica

Objeción Económica: al variar los precios en cualquier proporción es difícil mantener el supuesto de que las q_{it} permanecen constantes.

- La variación dependerá de las elasticidades cantidad-precio de cada bien.
- Estos índices sólo son válidos bajo el supuesto de demanda rígida.

- **B-D$_p$** cumple todas, pero no es ponderado → no suele utilizarse.
- **El mejor es L$_p$** : es el único que cumple realmente la proporcionalidad.

4. Índices cuánticos de producción.

Estudiamos magnitudes de cantidades físicas a lo largo del tiempo.

Sólo se usan índices complejos ponderados

I. Cuántico de Laspeyres

- $L_q = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} q_{it} p_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} q_{i0} p_{i0}}$
- $w_i = q_{i0} p_{i0}$

I. Cuántico de Paasche

- $P_q = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} q_{it} p_{it}}{\sum_{i=1}^{n} q_{i0} p_{it}}$
- $w_i = q_{i0} p_{it}$

I. Cuántico ideal de Fisher

- $\mathrm{F_q} = \sqrt{L_p P_p}$

- **Ponderamos por el valor neto o el valor añadido del bien y no por el precio de venta.** Si lo hiciéramos contabilizaríamos una misma cantidad varias veces, tantas etapas como suponga el proceso de producción.

5. Algunos problemas en la construcción y utilización de números índices.

Sistema de ponderaciones

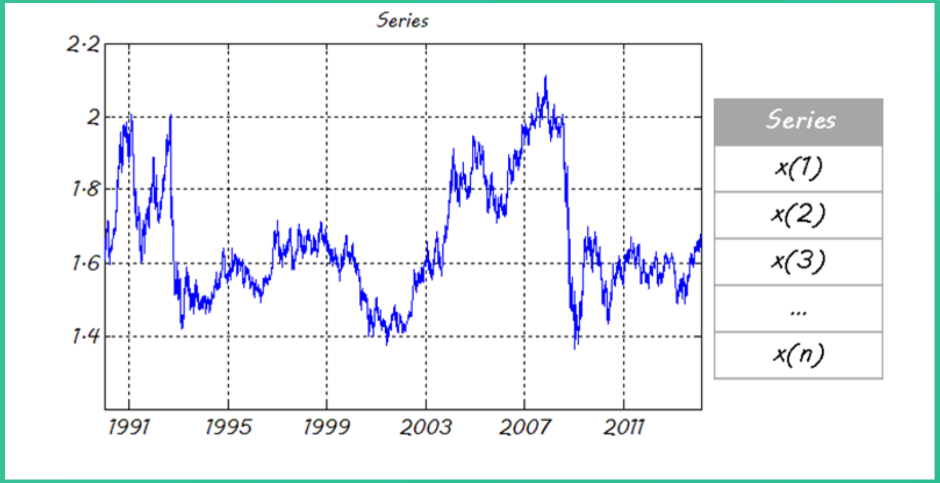
- *En la práctica, en los índices complejos, **un bien representa a un conjunto de "bienes similares"***
  - *Cada ponderación refleja al conjunto de bienes que representa no al bien en sí mismo.*

Periodo base

y su relación con los factores de ponderación

- ***Las ponderaciones hay que renovarlas periódicamente** para que el índice no se quede obsoleto y pierda representatividad.*

6. Deflactación de series estadísticas.



Podemos medir el valor de bienes y servicios en:

- **Precios constantes**: respecto al periodo base
- **Precios corrientes**: respecto a cada periodo

Aparece el problema de comparar magnitudes económicas a lo largo del tiempo: inflación

6. Deflactación de series estadísticas.

V_t: valor de una magnitud compleja en el periodo t

$$V_t = \sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{it}$$

- Índice de Laspeyres como deflactor

$$\frac{V_t}{L_p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{it}}{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}}\right)} = \sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0} \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{i0}} = V_0 P_q \neq V_t^R$$

Con Laspeyres no conseguimos pasar de precios corrientes a precios constantes pero se usa muchas veces por ser el disponible.

- Índice de Paasche como deflactor

$$\frac{V_t}{P_p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{it}}{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{it}}\right)} = \sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{it} \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{it}} = \sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{it} = V_t^R$$

IMPORTANTE

Paasche es el deflactor más adecuado, pero no el mas común

7.Enlaces y cambios de base

Problema: se reduce la representatividad del índice a medida que nos alejamos del periodo base.

Solución: necesitamos efectuar un cambio de base a un periodo (t) más cercano al actual.

Para el cambio de base nos basamos en la propiedad de inversión

$$I_h^i = \frac{I_0^i}{I_0^h} I_h^h = \frac{I_0^i}{I_0^h}$$

I_0^h es lo que denominamos índice de enlace técnico entre las dos series

IMPORTANTE

7.Enlaces y cambios de base

EJEMPLO

Supongamos que poseemos para un conjunto de bienes los siguientes datos:

Años	*Base* = 1990	*Base* = 1993
1990	$\sum p_{i0}q_{i0} = 5$	
1991	$\sum p_{i1}q_{i0} = 5,5$	
1992	$\sum p_{i2}q_{i0} = 6$	
1993	$\sum p_{i3}q_{i0} = 6,5$	$\sum p'_{i0}q'_{i0} = 8$
1994		$\sum p'_{i1}q'_{i0} = 9$
1995		$\sum p'_{i2}q'_{i0} = 10$
1996		$\sum p'_{i3}q'_{i0} = 10,5$

donde los períodos base de ponderación son 1990 y 1993, respectivamente. Con dichos datos se han elaborado los correspondientes índices de precios de Laspeyres

$$L_{90}^{90} = \frac{5}{5} = 100\% \qquad L_{93}^{93} = \frac{8}{8} = 100\%$$

$$L_{90}^{91} = \frac{5,5}{5} = 110\% \qquad L_{93}^{94} = \frac{9}{8} = 112,5\%$$

$$L_{90}^{92} = \frac{6}{5} = 120\% \qquad L_{93}^{95} = \frac{10}{8} = 125\%$$

$$L_{90}^{93} = \frac{6,5}{5} = 130\% \qquad L_{93}^{96} = \frac{10,5}{8} = 131,25\%$$

Determínense los índices de precios de los períodos 90, 91 y 92 con base 1993 = 100 .

SOLUCIÓN. Estamos tratando de combinar dos series de números índices con base distinta en una única serie continua.

Utilizando la definición de cambio de base que acabamos de ver, tenemos

$$I_h^i = \frac{I_0^i}{I_0^h}.$$

Por tanto,

$$L_{93}^{90} = \frac{L_{90}^{90}}{L_{90}^{93}} = \frac{100\%}{130\%} = 76,9\%$$

para los otros dos períodos

$$L_{93}^{91} = L_{90}^{91} \cdot L_{93}^{90} = 110\% \cdot 76,9\% = 84,6\%$$

$$L_{93}^{92} = L_{90}^{92} \cdot L_{93}^{90} = 120\% \cdot 76,9\% = 92,3\%.$$

$$\boxed{I_h^i = \frac{I_0^i}{I_0^h} I_h^h = \frac{I_0^i}{I_0^h}}$$

8. Participación y Repercusión

$$L_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}}$$

Nos referimos sólo a Laspeyres

Supongamos una variación en todas las magnitudes simples expresada por $\Delta p_{1t}, \Delta p_{2t}, \ldots \Delta p_{Nt},$

- El nuevo índice será $$L_p + \Delta L_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} (p_{it} + \Delta p_{it}) q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}}$$
- Para calcular **el incremento del índice** restamos el propio índice de Laspeyres

$$\Delta L_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} (p_{it} + \Delta p_{it}) q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}} - \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta p_{it} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}}$$

- Llamaremos **repercusión** de la variación del componente i en el índice general a

$$\boxed{R_i = \frac{\Delta p_{it} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}}}$$

La suma de todas las repercusiones individuales de cada componente es igual a la variación total del índice general

8. Participación y Repercusión

Participación

$$P_i = \frac{\frac{\Delta p_{it} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}} \cdot 100}{\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta p_{it} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{i0}} \cdot 100} = \frac{\Delta p_{it} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{i0}} \cdot 100$$

Es igual que la variación de la componente i en el índice general pero en %

"Entenderemos por participación en porcentaje de la componente *i* en la variación del índice general a la relación por cociente entre la repercusión en porcentaje y la suma de las repercusiones en porcentaje de todas las componentes, expresada en tanto por ciento" (Martín-Pliego, 2011; pág. 399)

8. Participación y Repercusión

Variación en % del índice general

$$\frac{\Delta L_p}{L_p} \cdot 100 = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} \Delta p_{it} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}}} \cdot 100 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta p_{it} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{i0}} \cdot 100$$

Variación de la componente i en el índice general

$$\frac{R_i}{L_p} = \frac{\dfrac{\Delta p_{it} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}}} = \frac{\Delta p_{it} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{it} q_{i0}}$$

La suma de todas las componentes será igual a la variación porcentual del índice general

Textos recomendados

- Martín-Pliego, *Introducción a la Estadística Económica y Empresarial*, Editorial AC, 2011, 3ª Edición

Prácticas recomendadas

Ejercicios: Martín-Pliego, 2011; pág. 407-412

Ejercicios resueltos en clase

Prácticas y recursos web (aula virtual)

¿Quieres saber más?

- https://www.uv.es/ceaces/numindices/numeros.htm
- http://www.domesticatueconomia.es/cinco-preguntas-y-respuestas-para-entender-el-ipc/