pacorabadan.com

6. Distribuciones Bidimensionales

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

DR. FRANCISCO RABADÁN PÉREZ

Índice

1. Distribución bidimensional de frecuencias

Variable bidimensional (x_i, y_j)

Podemos estudiar ambas variables por separado.

Lo mas interesante es ver qué relación existe entre ambas.

Si observamos una relación de dependencia, podemos formular la hipótesis de una relación causal.

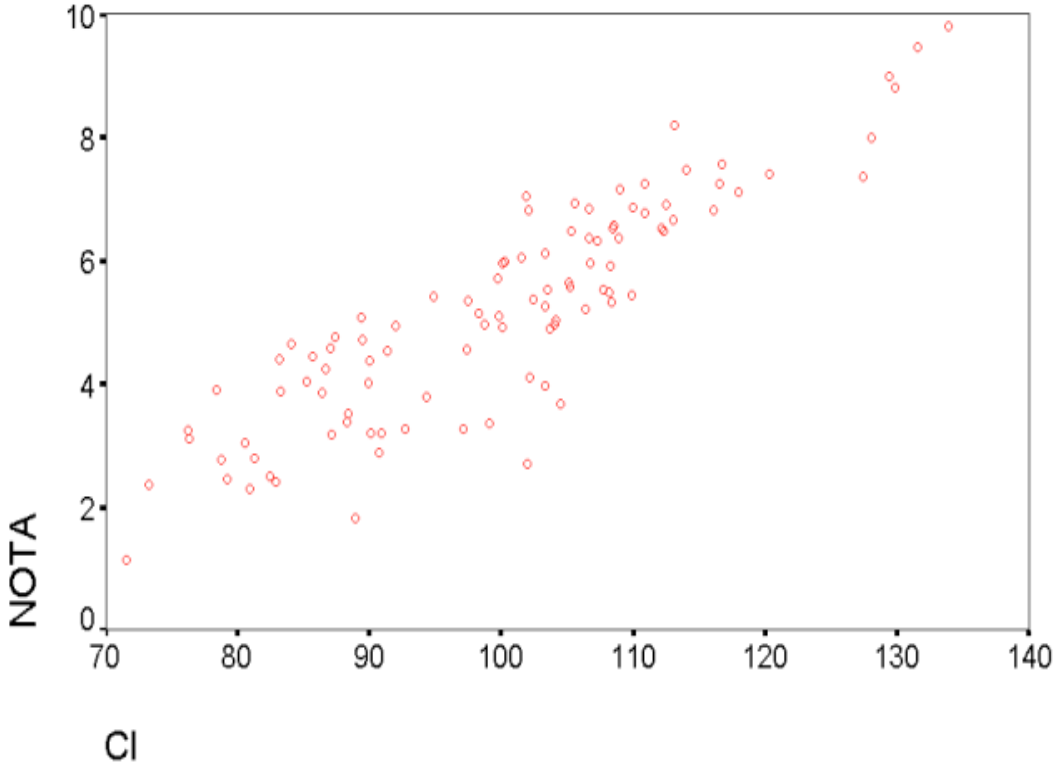
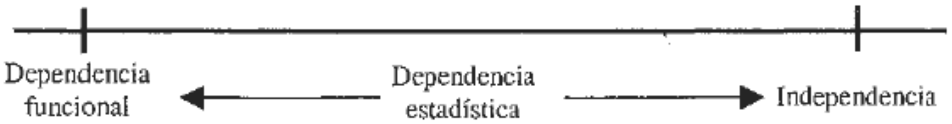


Diagrama de dispersión:
http://matematicas1bc.blogspot.com.es/2012/05/estadistica.html

1.1. Independencia y relación funcional de (X,Y)

Queremos conocer el grado y modo en que se relacionan dos caracteres (variables o atributos).

- Relación Perfecta
  - Matemática o Física
    Relación funcional
- Si existe un cierto grado de relación imperfecta
  - Estadística.
    Dependencia estadística.
- Independencia
  (Si no hay relación)
  - Sólo Descriptiva



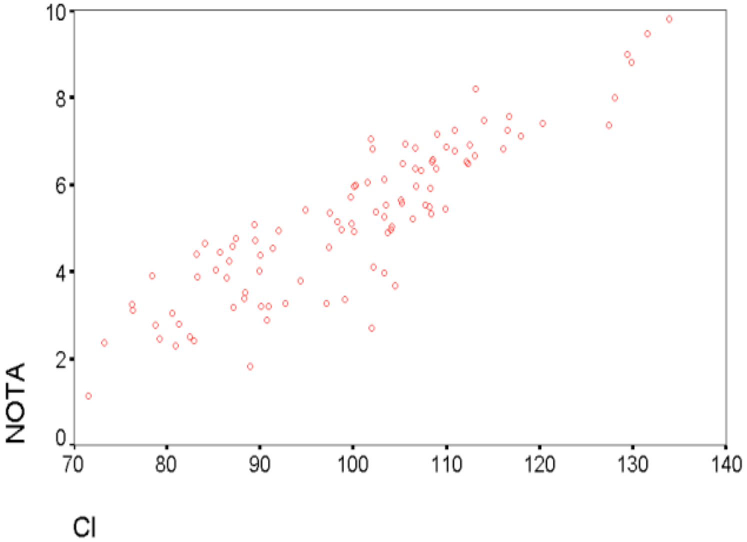
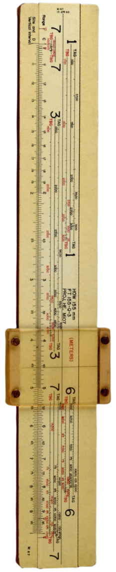


Diagrama de dispersión:
http://matematicas1bc.blogspot.com.es/2012/05/estadistica.html

(Martín-Pliego, 2011, pág. 199)

1.1. Independencia y relación funcional de (X,Y)



Dependencia

- **Variables** (consumo o renta)
  - Correlación
- **Atributos** (no cuantificables)
  - Contingencia o Asociación entre atributos (colores, especies animales,...)

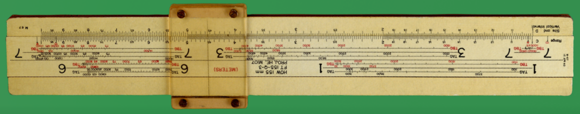
(Martín-Pliego, 2011, pág. 199)

1.2. Tablas de doble entrada: correlación y contingencia

Tablas de doble entrada

De Correlación

- Variables Cuantitativas



De Contingencia

- Variables Cualitativas
- Atributos

	y_1	y_2	…	y_j	…	y_k	$n_{i.}$
x_1	n_{11}	n_{12}	…	n_{1j}	…	n_{1k}	$n_{1.}$
x_2	n_{21}	n_{22}	…	n_{2j}	…	n_{2k}	$n_{2.}$
x_3	n_{31}	n_{32}	…	n_{3j}	…	n_{3k}	$n_{3.}$
…	…	…	…	…	…	n_{4k}	$n_{4.}$
…	…	…	…	n_{ij}	…	…	$n_{i.}$
x_n	n_{h1}	n_{h2}	…	n_{hj}	…	n_{hk}	$n_{h.}$
$n_{.j}$	$n_{.1}$	$n_{.2}$	$n_{.j}$	$n_{.j}$		$n_{.k}$	N

(Martín-Pliego, 2011, pág. 200)

1.2. Tablas de doble entrada: correlación y contingencia

- La tabla de doble entrada se puede transformar, por ejemplo, para facilitar el cálculo en una tabla de 3 columnas.
- Las dos primeras columnas indican el par (x_i, y_j)
- La tercera columna contiene la frecuencia conjunta asociada (n_{ij} u otras)

x_i	y_j	n_{ij}
x_1	y_1	n_{11}
x_2	y_2	n_{12}
x_3	y_3	n_{12}
…	…	…
x_i	x_j	
…	…	…
x_n	y_k	n_{h2}

(Martín-Pliego, 2011, pág. 201)

1.2. Tablas de doble entrada: correlación y contingencia

Tipos de frecuencias

- Frecuencia absoluta conjunta (n_{ij})
- Frecuencia relativa conjunta (f_{ij})

$$f_{ij} = \frac{n_{ij}}{N}$$

- Frecuencia acumuladas (F_{i*}, o F_{*j})::
  - Acumular respecto a x
  - Acumular respecto a y
  - Acumular simultáneamente.

x_i	y_j	n_{ij}
x_1	y_1	n_{11}
x_2	y_2	n_{12}
x_3	y_3	n_{12}
…	…	…
x_i	x_j	
…	…	…
x_n	y_k	n_{h2}

(Martín-Pliego, 2011, pág. 201)

1.2. Tablas de doble entrada: correlación y contingencia

- La primera fila (y_j) y la primera columna (x_i) muestran los valores ordenados de las variables.
- Dentro de la tablas vemos la **frecuencia conjunta** (n_{ij}): podrían ser también
  - relativas(f_{ij}),
  - acumuladas (N_{ij}), o
  - relativas acumuladas (F_{ij}).

	y_1	y_2	…	y_j	…	y_k	$n_{i.}$
x_1	n_{11}	n_{12}	…	n_{1j}	…	n_{1k}	$n_{1.}$
x_2	n_{21}	n_{22}	…	n_{2j}	…	n_{2k}	$n_{2.}$
x_3	n_{31}	n_{32}	…	n_{3j}	…	n_{3k}	$n_{3.}$
…	…	…	…	…	…	n_{4k}	$n_{4.}$
…	…	…	…	n_{ij}	…	…	$n_{i.}$
x_n	n_{h1}	n_{h2}	…	n_{hj}	…	n_{hk}	$n_{h.}$
$n_{.j}$	$n_{.1}$	$n_{.2}$	$n_{.j}$	$n_{.j}$		$n_{.k}$	N

(Martín-Pliego, 2011, pág. 200)

1.3. Distribuciones marginales

- **Frecuencia marginal**:
  - No nos importa el valor que toma la otra variable.
  - Coincide con la frecuencia de la variable unidimensional.
  - Ponemos un *, donde la variable no importa que tome cualquier valor.

	y_1	y_2	…	y_j	…	y_k	$n_{i.}$
x_1	n_{11}	n_{12}	…	n_{1j}	…	n_{1k}	$n_{1.}$
x_2	n_{21}	n_{22}	…	n_{2j}	…	n_{2k}	$n_{2.}$
x_3	n_{31}	n_{32}	…	n_{3j}	…	n_{3k}	$n_{3.}$
…	…	…	…	…	…	n_{4k}	$n_{4.}$
…	…	…	…	n_{ij}	…	…	$n_{i.}$
x_n	n_{h1}	n_{h2}	…	n_{hj}	…	n_{hk}	$n_{h.}$
$n_{.j}$	$n_{.1}$	$n_{.2}$	$n_{.j}$	$n_{.j}$		$n_{.k}$	N

$$\boxed{n_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{k} n_{ij}}$$

f. absoluta Marginal de X

$$\boxed{n_{j\cdot} = \sum_{i=1}^{h} n_{ij}}$$

f. absoluta Marginal de Y

$$\sum_{i=1}^{n} n_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{k} n_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} n_{ij} = N$$

(Martín-Pliego, 2011, pág. 201,202)

1.4. Distribuciones condicionadas (Martín-Pliego, 2011, pág. 203)

- Estudiamos las frecuencias de una variable para un conjunto concreto de valores de la otra.
- Ej:
  - $\mathbf{x_i/(y_1,y_2)}$: (x_i, n_{ij}) siendo $y_j=(y_1,y_2)$
  - $\mathbf{y_j/x_4}$: (y_j, n_{ij}) siendo $x_i=x_4$
- Notese que **"/"** no significa división, sino "**condicionado a**"
- En el caso de que esté condicionado a un único valor, la anotaremos como

$$\boxed{n_{i/j} ; n_{j/i}}$$

x_i/y_2	$n_{i/2}$
x_1	n_{12}
x_2	n_{22}
$\vdots$	$\vdots$
x_i	n_{i2}
$\vdots$	$\vdots$
x_h	n_{h2}
	$n_{\cdot 2}$

x_i/y_j	$n_{i/j}$
x_1	n_{1j}
x_2	n_{2j}
$\vdots$	$\vdots$
x_i	n_{ij}
$\vdots$	$\vdots$
x_h	n_{hj}
	$n_{\cdot j}$

Podemos calcular las frecuencias condicionadas relativas **dividiendo por el total de datos que cumplen la característica condicionante**

$$\boxed{f_{i/j} = \frac{n_{ij}}{n_{\cdot j}}}$$

f. Relativa de x_i condicionada a y_j

$$\boxed{f_{j/i} = \frac{n_{ij}}{n_{i\cdot}}}$$

f. Relativa de y_j condicionada a x_i

1.4. Distribuciones condicionadas

EJEMPLO

Sea la siguiente tabla de doble entrada

X \ Y	1	2	3	4	$n_{i\cdot}$
5	1	2	1	3	7
10	2	1	3	2	8
15	3	2	1	2	8
$n_{\cdot j}$	6	5	5	7	23

Se pide calcular:

(*a*) La distribución marginal de la Y.

(*b*) La distribución condicionada de $X/Y = 2$.

y_j	$n_{\cdot j}$	$n_{\cdot j}/N$
1	6	6/23
2	5	5/23
3	5	5/23
4	7	7/23
	23	1

$x_{i/y=2}$	$n_{i/2}$	$f_{i/2}$
5	2	2/5
10	1	1/5
15	2	2/5
	5	1

(Martín-Pliego, 2011, pág. 204,205)

1.5. Independencia estadística

"Dos variables X e Y se dice que son ***estadísticamente independientes*** ***cuando la frecuencia relativa conjunta es igual al producto de las frecuencias relativas marginales****"* (Martín-Pliego, 2011; pág 205)

$$\frac{n_{ij}}{N} = \frac{n_{i\cdot}}{N}\frac{n_{\cdot j}}{N}, \quad \forall(i,j) \rightarrow \begin{cases} f_{i/j} = \dfrac{n_{ij}}{n_{\cdot j}} = \dfrac{n_{i\cdot}\frac{n_{\cdot j}}{N}}{n_{\cdot j}} = \dfrac{n_{i\cdot}}{N} \\ f_{j/i} = \dfrac{n_{ij}}{n_{i\cdot}} = \dfrac{n_{\cdot j}\frac{n_{i\cdot}}{N}}{n_{i\cdot}} = \dfrac{n_{\cdot j}}{N} \end{cases}$$

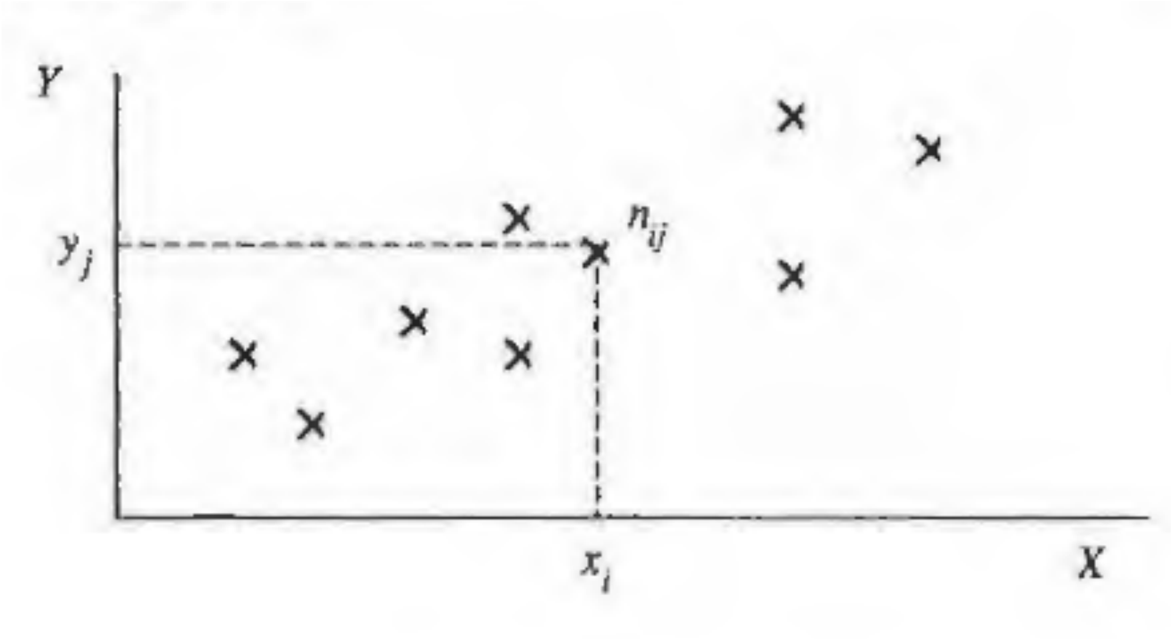
IMPORTANTE

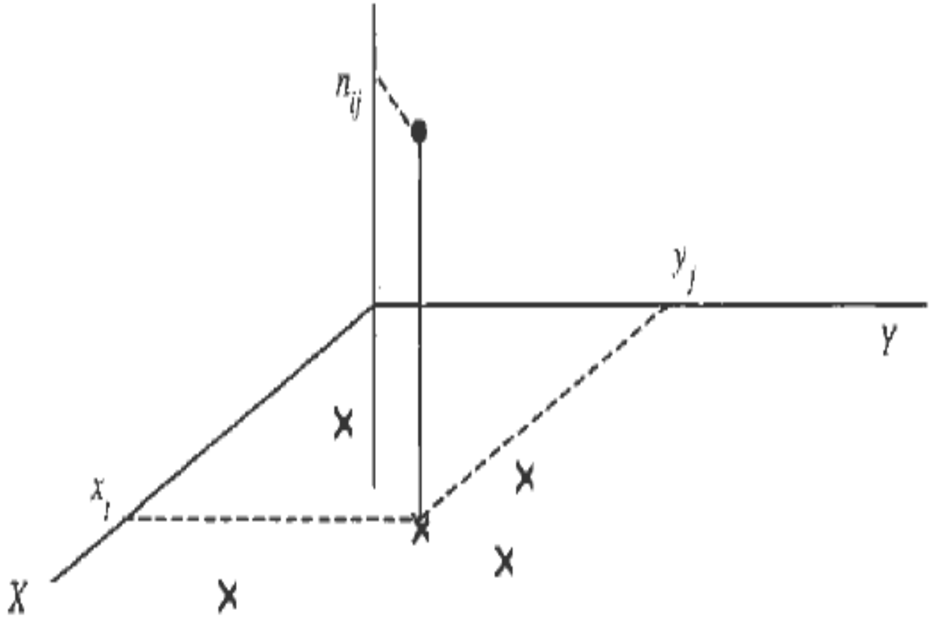
(Martín-Pliego, 2011, pág. 205)

"…, las frecuencias relativas condicionadas son iguales a sus correspondientes frecuencias relativas marginales, lo que nos indica que el condicionamiento, en cuanto tal, no existe: las variables son independientes, puesto que en las distribuciones marginales se estudia el comportamiento de una variable con independencia de los valores que pueda tomar la otra" (Martín-Pliego, 2011; pág 205)

2. Representaciones gráficas

Nube de puntos o diagrama de dispersión



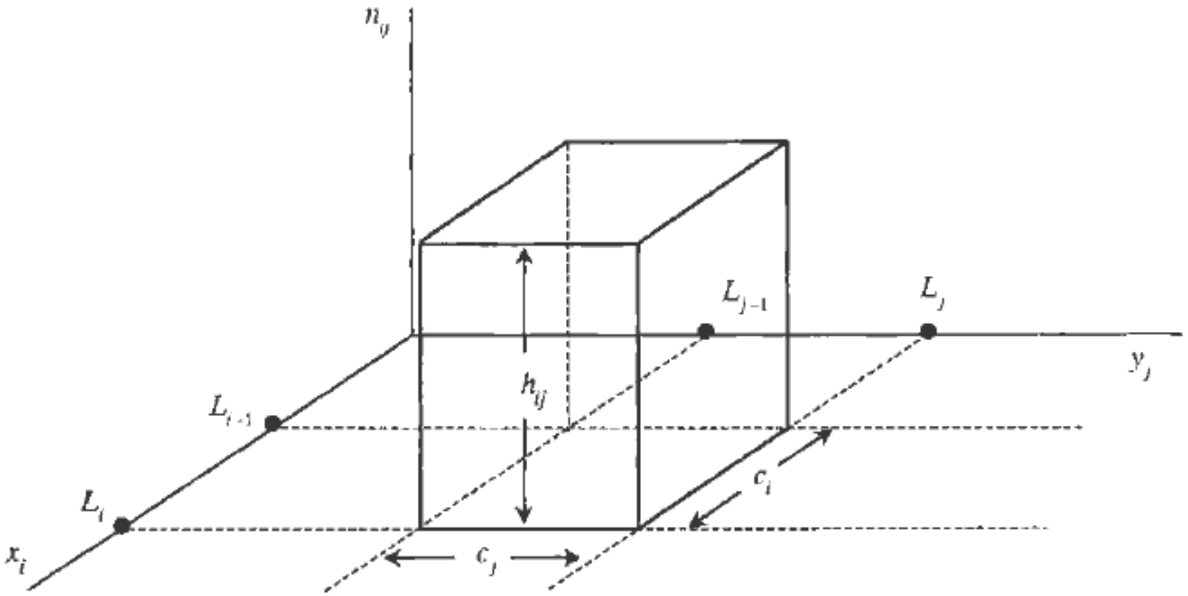


Se puede realizar también con datos agrupados utilizando la marca de clase.

2. Representaciones gráficas

Escalograma (datos agrupados)

$$n_{ij} = (L_i - L_{i-1})(L_j - L_{j-1}) \cdot h_{ij}$$



(Martín-Pliego, 2011, pág. 207)

Apéndice: momentos en distribuciones bidimensionales

Respecto al origen

$r = 1, s = 0 \rightarrow \; a_{10} = \bar{x}$

$r = 0, s = 1 \rightarrow \; a_{01} = \bar{y}$

$$a_{rs} = \sum_i \sum_j \frac{x_i^r y_j^s n_{ij}}{N}$$

Respecto a la media

m_{11}=cov(x,y)

$$m_{rs} = \sum_i \sum_j \frac{(x_i - \bar{x})^r \left(y_j - \bar{y}\right)^s n_{ij}}{N}$$

IMPORTANTE

Mas en (Martín Pliego, 2011; pag. 68-72)

Apéndice: momentos en distribuciones bidimensionales

Recordemos

Los momentos respecto a la media y respecto al origen se diferencian en un cambio de escala.

- Los a_r tienen como origen el cero, y los m_r en $\bar{x}$

Los momentos respecto a la media se pueden calcular partiendo de los momentos respecto al origen aplicando el binomio de Newton.

$$m_{20} = a_{20} - a_{20}^2 \quad V(x)$$

$$m_{02} = a_{02} - a_{02}^2 \quad V(y)$$

$$m_{11} = a_{11} - a_{10}a_{01} \quad COV(x,y)$$

IMPORTANTE

Textos recomendados

- Martín-Pliego, *Introducción a la Estadística Económica y Empresarial*, Editorial AC, 2011, 3ª Edición

Prácticas recomendadas

Ejercicios: los veremos en el capítulo 9

Ejercicios resueltos en clase

Prácticas y recursos web (aula virtual)

¿Quieres saber más?

- Ver 7.3.4 y 7.3.5 en Martín-Pliego
- El Capítulo 8 (Interpolación y ajuste) no entra en el temario del curso 2016/2017, pero es muy interesante.