pacorabadan.com

3. Medidas de posición

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

DR. FRANCISCO RABADÁN PÉREZ

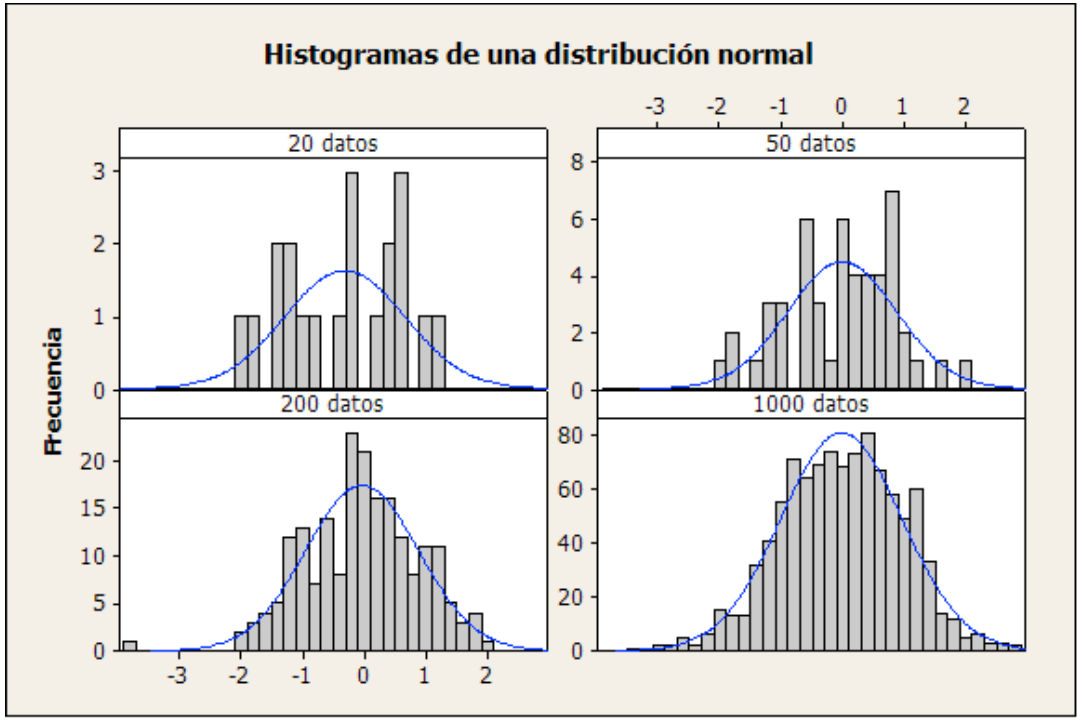
Índice

1. Medidas de Posición

Objetivo: **resumir o sintetizar** la información de los datos.

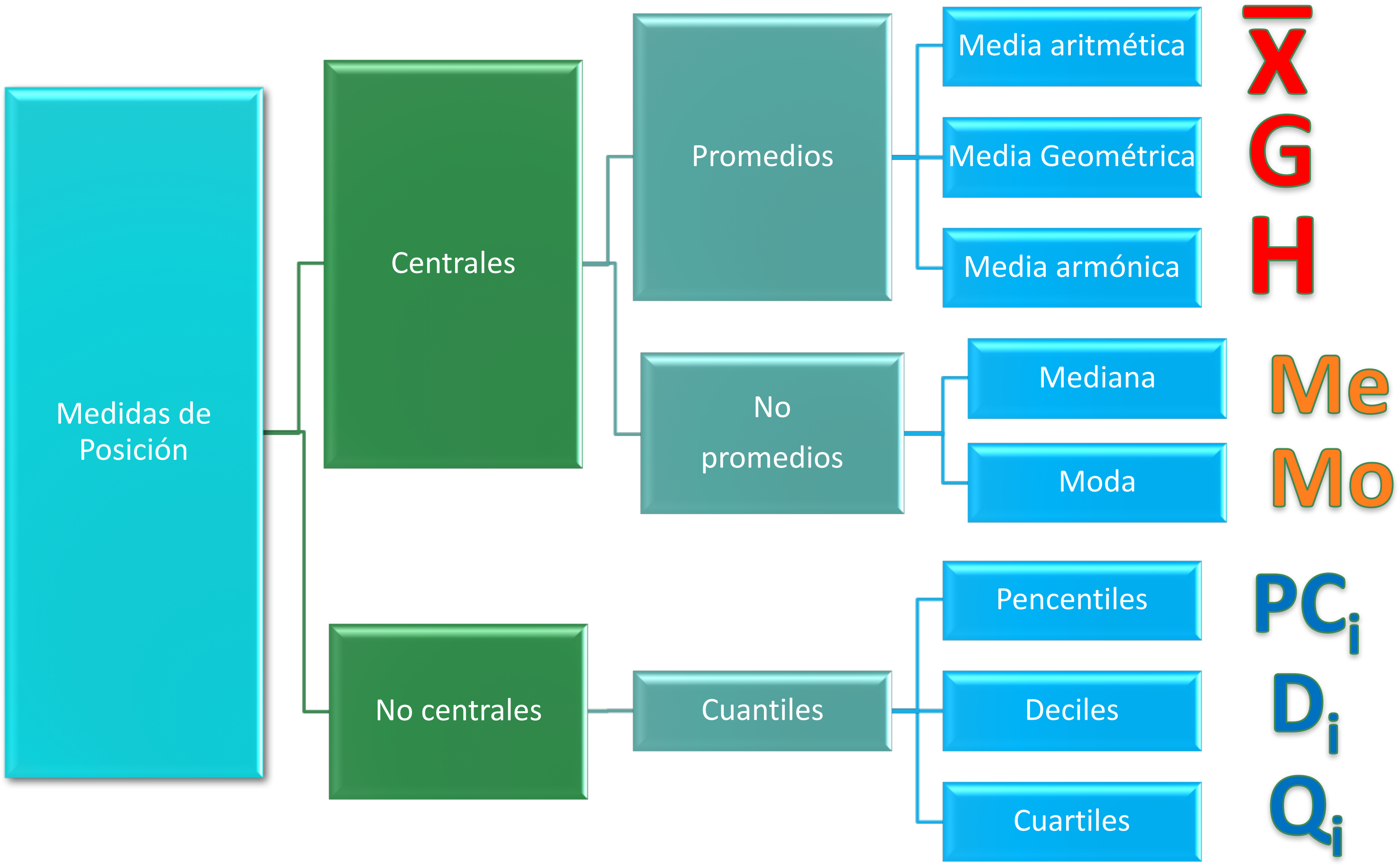
La **medida de posición ideal** sería aquella que pudiera **sustituir a todos los datos** (**valores** y frecuencias) sin que perdiéramos información (capacidad de descripción).

Nos interesan los valores centrales (porque es donde se suelen acumular mayor cantidad de datos), pero también los extremos (donde suelen aparecer los casos atípicos).



Fuente: http://www.caletec.com/blog/6sigma/histogramas-y-normalidad-de-los-datos/

1. Medidas de Posición



2. Media Aritmética $\bar{x}$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{N}$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i n_i}{N}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

Partiendo de los datos originales

- sumamos n_i veces x_i

Partiendo de la distribución de frecuencias

- En datos agrupados tomamos la marca de clase (x_i)

Media aritmética ponderada

- w_i: ponderación

2. Media Aritmética $\bar{x}$

Ventajas

- Tiene en cuentas todos los datos
- Fácil Cálculo
- Es única
- Centro de gravedad

Inconvenientes

- Afectada por los valores extremos

(Martín Pliego, 2011; pág. 41)

2. Media Aritmética $\bar{x}$

Propiedades

1. Centro de gravedad de la distribución: La suma de las desviaciones de los valores de la variable respecto a la media es cero.

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})\,n_i=\sum_{i=1}^{n}x_in_i-\sum_{i=1}^{n}\bar{x}n_i=\sum_{i=1}^{n}x_in_i-\bar{x}\sum_{i=1}^{n}n_i=N\frac{\sum_{i=1}^{n}x_in_i}{N}-\bar{x}N=N\bar{x}-\bar{x}N=0$$

2. Afectada por los cambios de origen y = x + k $\rightarrow \bar{y}=\bar{x}+k$

3. Afectada por los cambios de escala y = kx $\rightarrow \bar{y}=k\bar{x}$

4. Hace mínima las desviaciones cuadráticas (Prop.2. Martín Pliego, 2011)

Mas en (Martín Pliego, 2011; pag. 39-41) …. N.E. 2016/2017

3. Media geométrica

G

- **Definición**: Raíz n-ésima del producto de los N valores de la variable de la distribución

Cálculo

$$G = \sqrt[N]{{x_1}^{n_1} \cdot {x_2}^{n_2} \cdot \ldots \cdot {x_n}^{n_n}} = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{n} {x_i}^{n_i}}$$

Comprendiendo la geométrica:

Cambiamos la suma por la multiplicación.

- **Ponderar**: en vez de multiplicar por la frecuencia, elevamos a la frecuencia (multiplicar n_i veces x_i)
- **Repartir**: En vez de dividir por N, hacemos la raíz N-ésima.

3. Media geométrica G

(Martín Pliego, 2011; pág. 43)

Ventajas

- Tiene en cuentas todos los datos
- Menos afectada por los valores extremos

Inconvenientes

- Significado estadístico poco intuitivo
- Computo mas difícil
- Posibilidad de indeterminación
  - Problemas con el cero y números negativos

Recomendado para:

- Porcentajes
- Tasas
- Números Índices
- Variaciones Acumulativas

3. Media geométrica G

Incrementos de magnitud

Periodo	incremento	x_i
T1	8%	X_1=8
T2	12%	X_2=12
T3	18%	X_3=18
T4	27%	X_4=27
T5	40,5%	X_5=40,5
T6	60,75%	X_6=60,75

Los valores de la distribución representan incrementos de una magnitud trimestral→ media geométrica

$$G = \sqrt[6]{8 \cdot 12 \cdot 18 \cdot 27 \cdot 40{,}5 \cdot 60{,}75}$$
$$= \sqrt[6]{114.791.256} = 22{,}0454$$

- Significado:
  - *Todos estos aumentos equivalen a un aumento en cada trimestre de 22.0454%*

3. Media geométrica

G

IMPORTANTE

Tipos de interés

$$C_1 = C_0(1 + i_1)$$
$$C_2 = C_1(1 + i_2) = C_0(1 + i_1)(1 + i_2)$$
$$C_n = C_{n-1}(1 + i_n) = C_0(1 + i_1)(1 + i_2) \ldots (1 + i_n)$$

- Tipo medio equivalente: $C_n = C_0(1 + i)^n$
- Igualamos $\cancel{C_0}(1 + i_1)(1 + i_2) \ldots (1 + i_n) = \cancel{C_0}(1 + i)^n$
- Despejando

$$\boldsymbol{i = \sqrt[n]{(1 + i_1)(1 + i_2) \ldots (1 + i_n)} - 1}$$

(Martín Pliego, 2011; pág. 44)

3. Media geométrica **G**

Propiedades

1. El logaritmo de la media geométrica es la media aritmética de los logaritmos de los valores de la variable

$$Log\ G = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} Log(x_i) \cdot n_i$$

Mas en (Martín Pliego, 2011; pág.. 42) …. N.E. 2016/2017

4. Media Armónica

H

Cálculo

$$H = \frac{N}{\frac{1}{x_1}n_1 + \frac{1}{x_2}n_2 + \cdots \frac{1}{x_n}n_n} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{n}\frac{n_i}{x_i}}$$

- **Nota**: La inversa de H es la Media aritmética de los inversos de los valores de la variable

Más fácil

$$\frac{1}{H} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{n_i}{x_i}}{N}$$

Comprendiendo la armónica:

- **Trabajamos con la inversa de la variable.**
- Ejemplo:
  - 9 Km/h (en un hora recorremos 9 Km)
  - 1/9 h/km (tardamos 1/9 horas en recorrer un kilómetro)

4. Media Armónica

H

(Martín Pliego, 2011; pág. 45)

Ventajas

Contribuyen todos los valores

Mas representativa cuando hablamos de variables cociente de magnitudes simples

Inconvenientes

Queda afectada por valores pequeños

Indeterminada con algún valor cero

Recomendado :

variables que están relacionadas de forma inversa con el tiempo

- velocidad, rendimiento,...

No recomendada para valores muy pequeños

4.2. Relación entre estos promedios

Se verifica que

$$H \leq G \leq \bar{x}$$

(Martín Pliego, 2011; pág. 46)

5. Mediana

Me

Definición: valor de la distribución ordenada de menor a mayor que deja a su izquierda y su derecha el mismo número de frecuencias (individuos).

n impar

$$Me = x_{n/2}$$

n par

$$Me = \frac{x_{N/2} + x_{(N+1)/2}}{2}$$

Mas en (Martín Pliego, 2011; pag. 42) …. N.E. 2016/2017

Me

5. Mediana

Ejemplo (Martín-Pliego,2011-pág.48)

x_i	n_i	N_i
1	3	3
2	4	7
5	9	16
7	10	26
10	7	33
13	2	35
	35	

donde

$$\frac{N}{2} = \frac{35}{2} = 17{,}5\,,$$

y el centro será el que ocupe el lugar décimo-octavo, con lo que la mediana será

$$Me = 7$$

Mas en (Martín Pliego, 2011; pag. 42) …. N.E. 2016/2017

5. Mediana

Me

Datos agrupados:

Martín-Pliego estudia la posición teórica de la mediana bajo el presupuesto de uniformidad en la distribución

Nosotros hablaremos de intervalo mediano: aquel donde se encuentra la frecuencia acumulada N/2.

Mas en (Martín Pliego, 2011; pag. 49) …. N.E. 2016/2017

5. Mediana

Me

Ventajas

No le afectan los valores extremos

Inconvenientes

No tiene en cuenta el peso de los valores (xi)

No minimiza las desviaciones absolutas

Recomendado para:

cuando la media no sea representativa

- Lo veremos en DISPERSIÓN

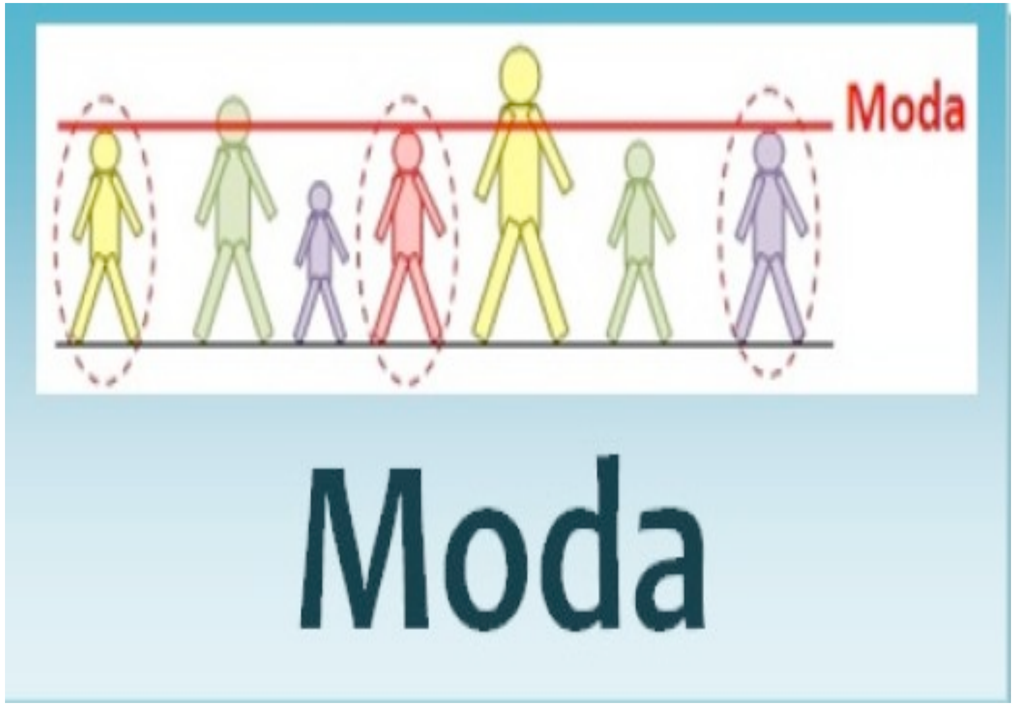
6. Moda

Mo

Definición: valor de la distribución que más se repite.

Cálculo: valor de la variable con frecuencia absoluta máxima.

Intervalos: Hablaremos de intervalo modal (por la misma razón que en la mediana)



6. Moda

Mo

Ventajas	Inconvenientes	Recomendado para:
?	No tiene porque ser única	Como dato curioso
	No tiene en cuenta el resto de valores ni sus frecuencias	Cuando su frecuencia absoluta es superior a N/2 y **porque coincide con la mediana**

7. Medidas de Posición no centrales

Cuartiles:

- C_1,C_2 y C_3
- *Dividen la distribución en cuatro partes iguales*
- C_2=*Me*

Deciles:

- D_1,D_2,...D_9
- Dividen la distribución en 10 partes iguales
- D5=Me

Percentiles:

- PC_1,PC_2,..PC_{99}
- Dividen la distribución en cien partes iguales

Cuantiles (Q_i) : n-1 valores (x_i)que dividen las distribución en n partes iguales respecto al número de individuos.

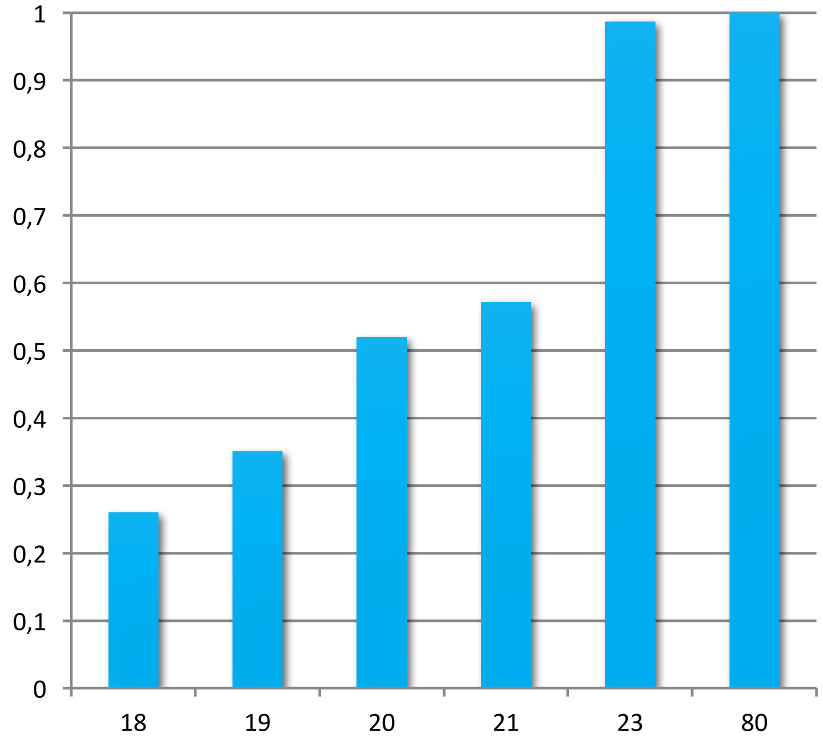
7. Medidas de Posición no centrales

En el diagrama de Frecuencias relativas acumuladas podemos identificar la posición (eje vertical) y buscar el valor x_i (eje horizontal)

Posición	Cuantiles	Valor Cuantil
0,5	$Me=C_2=D_5=PC_{50}$	20
0,25	$C_1=PC_{25}$	18
0,75	$C_3=PC_{75}$	23

- En caso de duda consultamos la distribución de frecuencias (xi, Fi)
- Notese que las medidas de posición no centrales pueden ser iguales, incluso, para todo el recorrido de la variable.

Diagrama de barras de Fi



Fuente: elaboración propia
X: Edad de los alumnos

7. Medidas de posición no centrales

Ventajas	Inconvenientes	Recomendado para:
No les afectan los valores extremos	No tiene en cuenta los valores (x_i)	Describir el comportamiento de la distribución por tramos
Conjuntamente dan una elevada capacidad de descripción		

Apéndice: momentos de una distribución de frecuencias

Respecto al origen	$r=_0 \rightarrow a_0=1$
	$r=_1 \rightarrow a_1=\bar{x}$
Respecto a la media	$r=0 \rightarrow m_0=1$
	$r=1 \rightarrow m_1=0$
	$R=2 \rightarrow m_2=\sigma^2$

$$a_r = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i)^r n_i}{N}$$

$$m_r = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^r n_i}{N}$$

Mas en (Martín Pliego, 2011; pag. 68-72)

Apéndice: momentos de una distribución de frecuencias

Los momentos respecto a la media y respecto al origen se diferencian en un cambio de escala.

- Los a_r tienen como origen el cero, y los m_r en $\bar{x}$

Los momentos respecto a la media se pueden calcular partiendo de los momentos respecto al origen aplicando el binomio de Newton.

$$m_0 = a_0$$

$$m_1 = a_1 - a_1$$

$$m_2 = a_2 - {a_1}^2$$

IMPORTANTE

Textos recomendados

- Martín-Pliego, *Introducción a la Estadística Económica y Empresarial*, Editorial AC, 2011, 3ª Edición

Prácticas recomendadas

Ejercicios: pág 61 -67 (Martín-Pliego,2011)

Ejercicios resueltos en clase

Prácticas y recursos web (aula virtual)