2. VARIABLE ALEATORIA

Estadística I

Dr. Francisco Rabadán Pérez

Índice

1. Variable Aleatoria

- Variable aleatoria o variante (que representamos por la letra ξ) es una aplicación del espacio muestral en el conjunto de números reales que conserva la medida de probabilidad.

$$\mathbb{E} \xrightarrow{\quad\quad\quad\xi\quad\quad\quad} \mathbb{R}$$

Universo Ω → Espacio Muestral E → Variable Aleatoria ξ → Probabilidad P

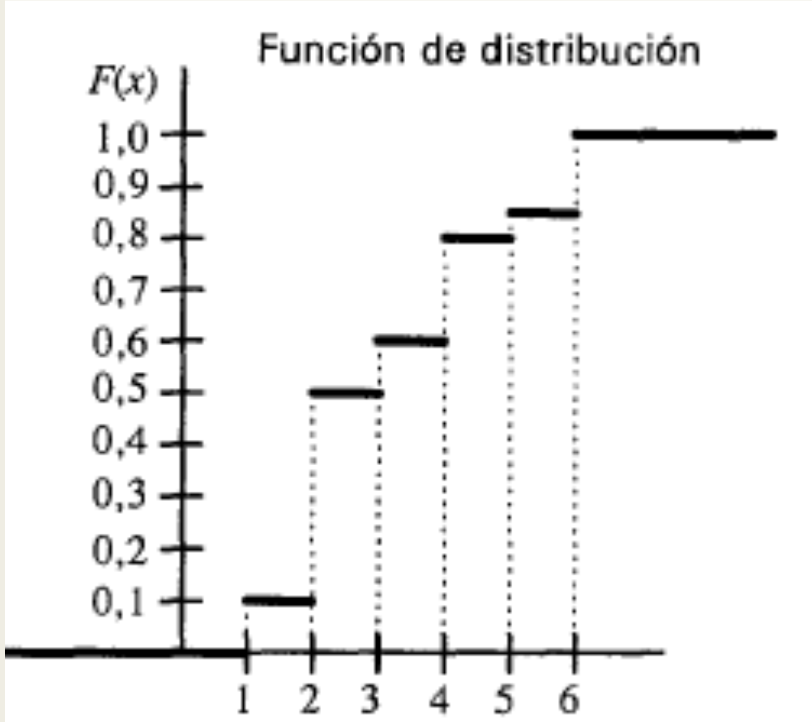
2. Función de Distribución

- Mide la probabilidad acumulada hasta un punto de la variable aleatoria

$$\boxed{F(X) = P(\xi \leq x)}$$

- Propiedades:

1. $F(-\infty) = 0$
2. $F(+\infty) = 1$
3. $F(b) - F(a) = P(a < \xi \leq b)$
4. F(x) es no decreciente $F\big(x + \Delta(x)\big) \geq F(x) \;\; \forall x$
5. F(x) es continua por la derecha



Fte: Martín-Pliego, Paraninfo, pág. 47)

3. Variable Aleatoria Discreta (VAD)

- VAD: Dados dos puntos cualesquiera de la VA, entre ellos tenemos un número finito de puntos.
  - *En algunos casos se verifica que* $\frac{CF}{CP} > 0$, *y a este cociente no nulo le denominados **masa o cuantía de probabilidad** en el punto*
- Función de cuantía: $P_i = P(\xi = x_i)$
  - *P-I)* $P_i \geq 0$ *;*
  - *P-II)*$\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$
- Función de Distribución: $F(X) = P(\xi \leq x)$ es
  - *función escalonada con tramos costantes y discontinuidades por la izquierda en los puntos en que existe probabilidad no nula.*
  - *La amplitud de las discontinuidades coincide con la probabilidad en el punto.*

3. Variable Aleatoria Discreta (VAD)

Función de cuantía

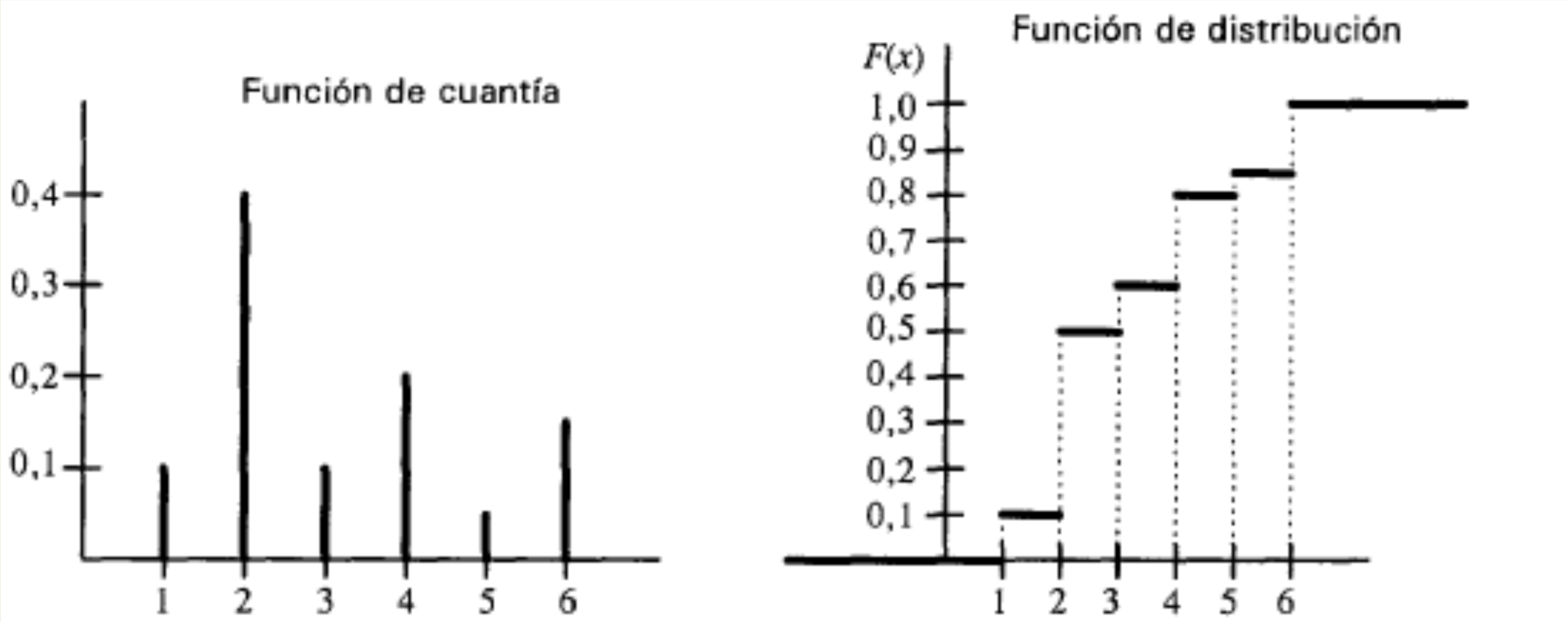
x_i	1	2	3	4	5	6
$P(\xi = x_i)$	0,10	0,40	0,10	0,20	0,05	0,15

Función de distribución

x_i	1	2	3	4	5	6
$\sum_{i=1}^{6} P(\xi \leq x_i)$	0,10	0,50	0,60	0,80	0,85	1,00

Fte: Martín-Pliego, Paraninfo, pág. 47)

3. Variable Aleatoria Discreta (VAD)



Fte: Martín-Pliego, Paraninfo, pág. 47)

4. Variable Aleatoria Continua(VAC)

- VAC: Dados dos puntos cualesquiera de variable aleatoria entre ellos encontramos un número infinito de puntos.
- Y por tanto, La función de cuantía será nula para todo el recorrido de la VA.

$$P_i = P(\xi = x_i) = 0 \leftrightarrow \frac{CF}{\infty} = 0$$

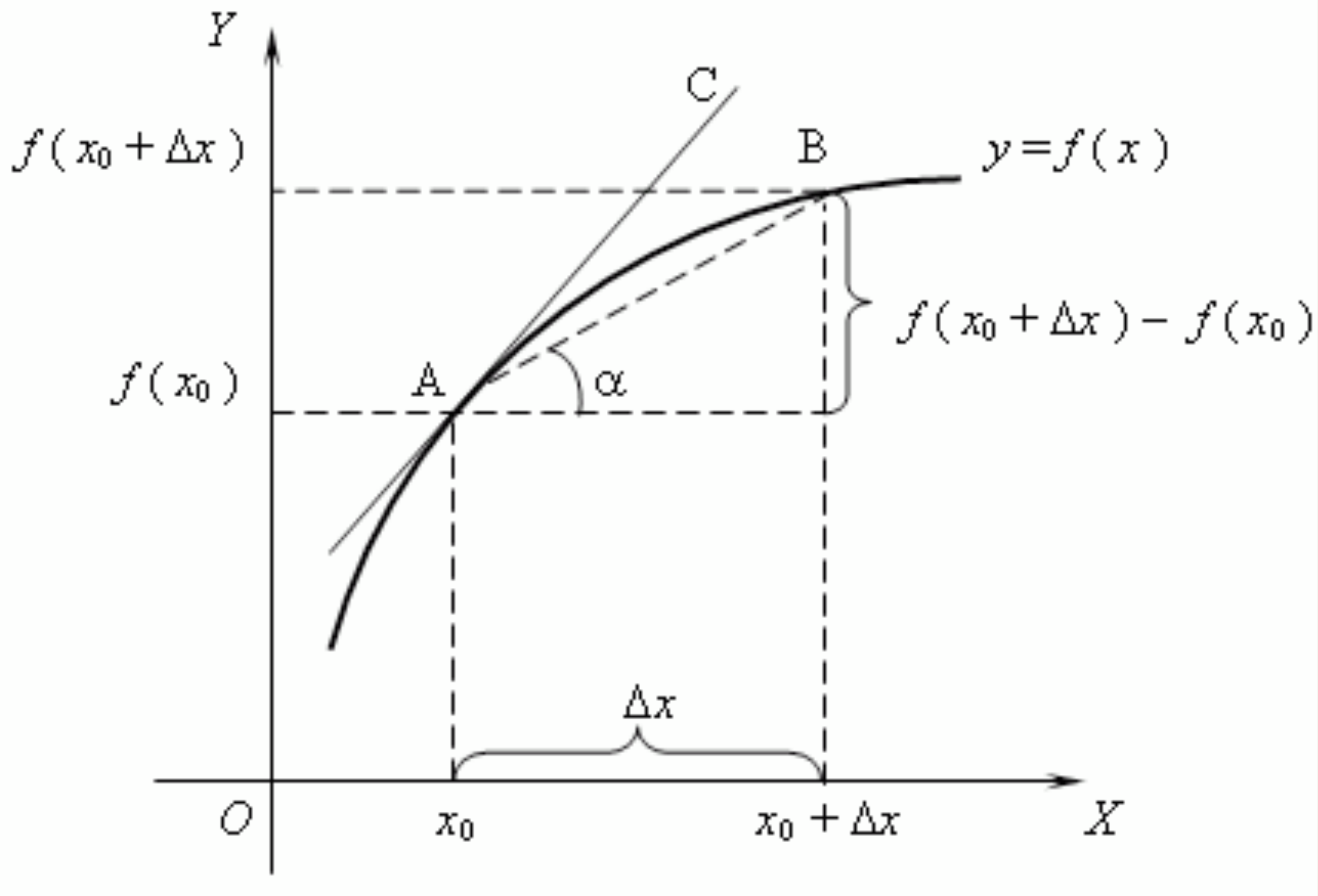
- Sin embargo, la Función de Distribución de una VAC es continua (por la derecha y por la izquierda.
- Aunque no la probabilidad para un punto es siempre cero, si podemos calcular probabilidad para intervalos.
- Por eso analizamos la densidad de probabilidad: cociente masa de probabilidad entre amplitud de intervalo de VA.
- Si el intervalo es infinitamente pequeño coincide con el diferencial de x (dx).
- La función de densidad de probabilidad mide la proporción de masa de probabilidad respecto del diferencial de x.

4. Variable Aleatoria Continua(VAC)

- Función de densidad f(x):
  - $f(x) = F'(x)$
  - $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$
- Cumple dos propiedades:
  - $f(x) > 0 \quad \forall x$
  - $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$; *Expresa que la suma de todas las probabilidades es la unidad, siendo la probabilidad elemental en continuidad* $f(x)dx$.

4. Variable Aleatoria Continua(VAC)

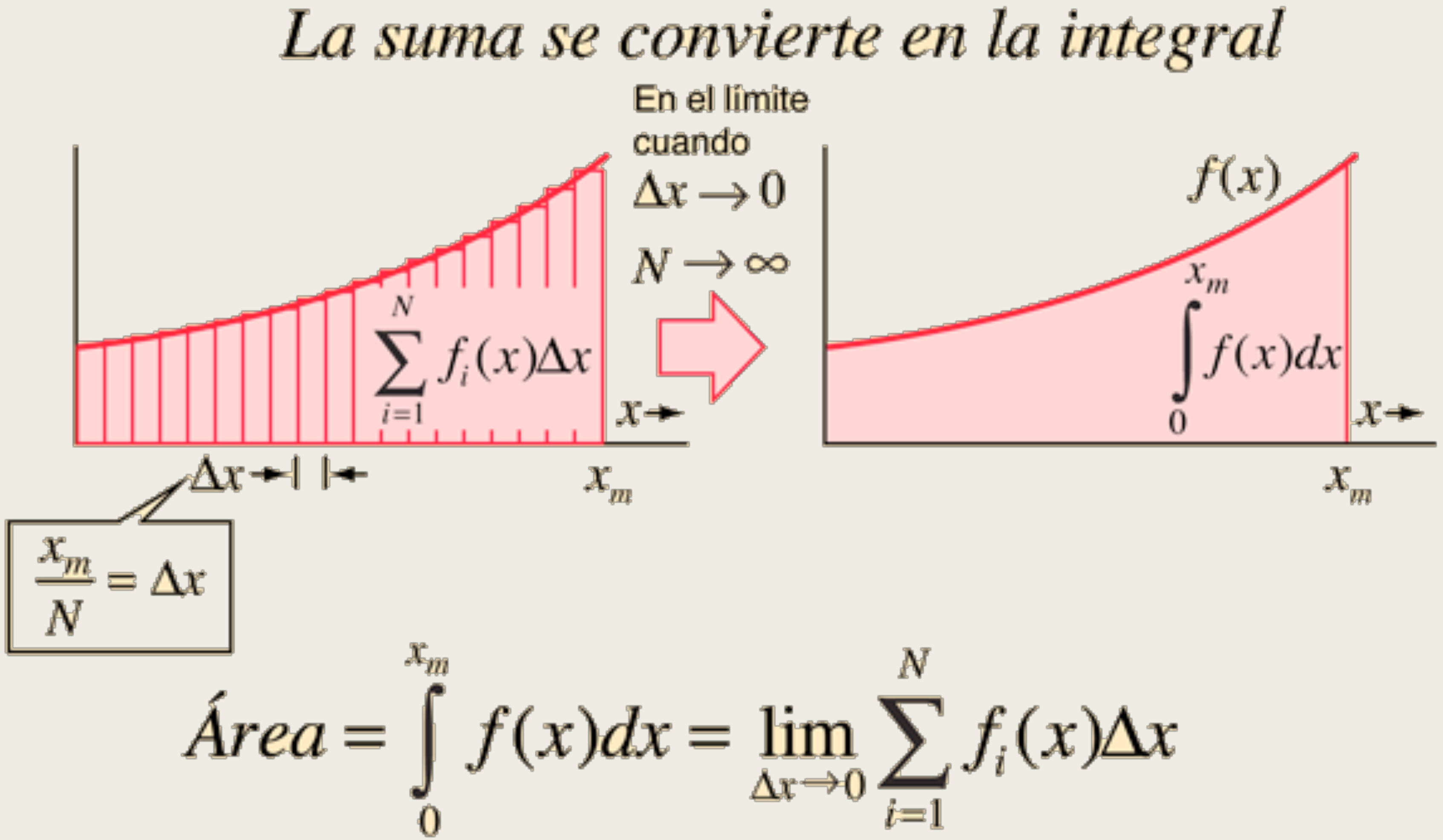
- Función de densidad f(x): $f(x) = F'(x)$



Ejemplo de derivada
Fte: http://blog.espol.edu.ec/guifecep/derivada/

4. Variable Aleatoria Continua(VAC)

- Función de densidad f(x): $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$



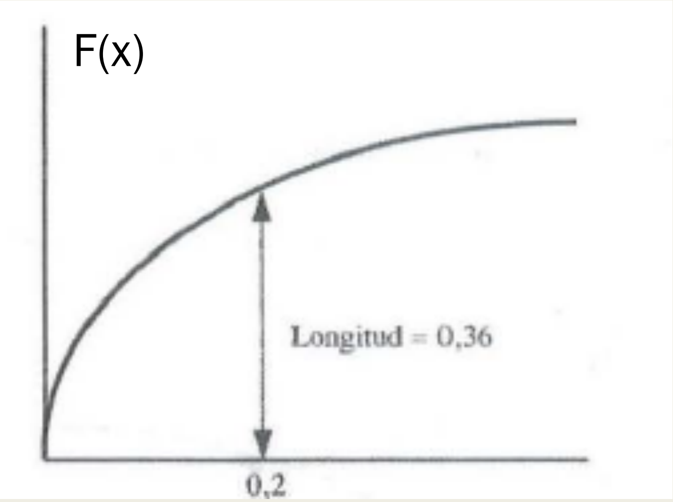
Fuente: http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/integ.html

4. Variable Aleatoria Continua(VAC)

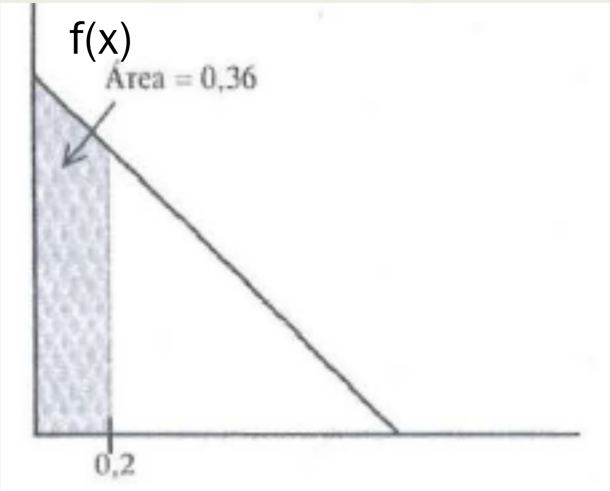
- A efectos nemotécnicos, dados dos puntos a y b de la VAC:

– *F(x) mide probabilidades como incrementos F(b)-F(a): incremento de probabilidad entre dos puntos (a,b).*

– *Integrar f(x) proporciona probabilidades como áreas :* $\int_a^b f(x)dx$



Función de distribución



Función de densidad

(Fte: Martín-Pliego, Paraninfo, pág. 51)

5. Esperanza Matemática

- Esperanza Matemática (μ): coincide con el valor de la media aritmética poblacional cuando el número de experimentos aleatorios tiende a infinito. Por tanto lo consideramos valor esperado supuesta la convergencia absoluta.
- Cálculo: $\mu = \alpha_1$
  - *VAD:* $\mu = \alpha_1 = \sum_i x_i P_i$
  - *VAC:* $\mu = \alpha_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$

5. Esperanza Matemática

- Propiedades (Operador Esperanza).

1. $E(k) = k$
2. $E(\xi \pm k) = E(\xi) \pm k$
3. $E(k\xi) = kE(\xi)$
4. $E(\xi \pm \eta) = E(\xi) \pm E(\eta)$
5. $E(\xi * \eta) = E(\xi) * E(\eta) \leftrightarrow \xi, \eta$ independientes

5. Esperanza Matemática

- Generalización de la esperanza E(g(x)): podemos calcular el valor esperado de cualquier función si conocemos el valor esperado de las va independientes a través de las propiedades de la esperanza.

$$E[g(x)] = \begin{cases} \sum_i g(x_i)P_i \,; VAD \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx \,; VAC \end{cases}$$

6. Momentos de la VA

- Respecto al Origen

$$\alpha_r = E(\xi^r) = \begin{cases} \sum_i x_i^r P_i \,; VAD \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx \,; VAC \end{cases}$$

- Respecto a la Esperanza

$$\mu_r = E(\xi - \alpha_1)^r \begin{cases} \sum_i (x_i - \alpha_1)^r P_i \,; VAD \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \alpha_1)^r f(x)dx \,; VAC \end{cases}$$

6. Momentos de la VA

- Momentos respecto a la esperanza importantes
- Varianza

$$\mu_2 = \sigma^2 = E(\xi - \alpha_1)^2 \begin{cases} \sum_i (x_i - \alpha_1)^2 P_i \,; VAD \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \alpha_1)^2 f(x) dx \,; VAC \end{cases}$$

- Para construir g_1 y g_2

$$\mu_3 = E(\xi - \alpha_1)^3 \qquad \mu_4 = E(\xi - \alpha_1)^4$$

g_1 es coeficiente de asimetría

g_2 es coeficiente de curtosis

6. Momentos de la VA

- Relación entre μ_r y α_r

$$\mu_1 = E(\xi - \alpha_1)^1 = \alpha_1 - \alpha_1 = 0$$

$$\mu_2 = \sigma^2 = E(\xi - \alpha_1)^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$$

Varianza

$$\mu_3 = E(\xi - \alpha_1)^3 = \alpha_3 - \alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_1^3$$

$$\mu_4 = E(\xi - \alpha_1)^4 = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 - 2\alpha_1^4$$

$$\mu_r = E(\xi - \alpha_1)^r = \sum_{k=o}^{r} \binom{r}{k} (-\alpha_1)^k \alpha_{r-k}$$

7. Varianza y desviación típica de la VA

- Llamamos Varianza al momento central de segundo orden

$$\boxed{\sigma^2 = \mu_2 = E(\xi - \alpha_1)^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2}$$

- Mide las desviaciones cuadráticas de la VA respecto a la esperanza
- La desviación típica traslada la varianza a unidades comparables con la esperanza.

$$\boxed{\sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\sigma^2}}$$

7. Varianza de la VA

- Propiedades (Operador Varianza).

1. $V(\xi) \geq 0$
2. $V(k) = 0$
3. $V(\xi \pm k) = V(\xi)$
4. $V(k\xi) = k^2 V(\xi)$
5. $V(\xi \pm \eta) = V(\xi) + V(\eta) \pm 2Cov(\xi, \eta)$
6. ξ, η independientes $\rightarrow V(\xi \pm \eta) = V(\xi) + V(\eta)$

7. Varianza de la VA

- Generalización a g(x) (Operador Varianza).

$$V(g(x)) = E\left[g(x) - E(g(x))\right]^2 =$$

$$= \begin{cases} \sum_i \left(g(x_i) - E(g(x_i))\right)^2 P_i \,; VAD \\ \int_{-\infty}^{\infty} \left(g(x) - E(g(x))\right)^2 f(x)dx \,; VAC \end{cases}$$

8. Coeficiente de Variación de Pearson

- Permite establecer una medida adimensional de la dispersión relativa de cada VA

$$CV_{\xi} = \frac{\sigma}{|\mu|} = \frac{\sigma}{|\alpha_1|}$$

- Permite:
  - *comparar dispersiones relativas entre varias VA's.*
  - *Medir el nivel de representatividad de la esperanza y el nivel de dispersión, tal y como vimos en el tema de descriptiva de medidas de dispersión.*

9. Variable Tipificada

- Podemos trasladar cualquier VA ξ a una distribución equivalente ξ^* de esperanza cero y desviación típica 1 mediante la siguiente transformación

$$\boxed{\xi^* = \frac{\xi - \mu}{\sigma}}$$

- ξ^* mide las desviaciones de ξ respecto de la esperanza tomando como unidad de medida la desviación típica
  - *El signo indica si la desviación está por encima de la media ($\xi^*>0$), o por debajo ($\xi^*<0$)*

10. Teorema de Chebycheff

- Permite fijar una cota de probabilidad para la VA sin que sea necesario conocer la distribución de probabilidad asociada.
- Es un caso particular de la desigualdad de Markov (discipulo de Chebycheff) siendo $g(\xi)$ función no negativa, y λ una constante positiva se cumple que:

$$\boxed{P(g(\xi) \geq \lambda) \leq \frac{E[g(\xi)]}{\lambda}}$$

- Desigualdad de Chebycheff:

si hacemos que $g(\xi) = (\xi - \mu)^2 \geq 0$, y siendo $E[(\xi - \mu)^2] = \sigma^2$, obtenemos

$$\boxed{P\left((\xi - \mu)^2 \geq \lambda\right) \leq \frac{\sigma^2}{\lambda}}$$

Andréi Andréyevich Márkov (1856-1922)

Pafnuti Lvóvich Chebyshov (1821-1894)

10. Teorema de Chebycheff

$$P\left((\xi-\mu)^2 \geq \lambda\right) \leq \frac{\sigma^2}{\lambda}$$

- Significado y utilidad del teorema:
- Nos permite acotar la probabilidad de que la VA se aleje de la esperanza en términos absolutos una cierta cantidad.
- Acota la probabilidad de que una variable tome un valor dentro (o fuera) de un intervalo simétrico en torno a la media sin necesidad de conocer como se distribuye la VA en términos de probabilidad. Sólo necesitamos conocer la varianza.

10. Teorema de Chebycheff

$P((\xi - \mu)^2 \geq \lambda) \leq \frac{\sigma^2}{\lambda}$

- Algunas transformaciones útiles:
- $\lambda = k^2; \mathrm{k} > 0 \rightarrow \mathrm{P}[|\xi - \mu| \geq k] \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$
- $\lambda = k^2\sigma^2; \mathrm{k}\sigma > 0 \rightarrow \mathrm{P}[|\xi - \mu| \geq k\sigma] \leq \frac{1}{k^2}$
- Pasando al complementario $\mathrm{P}[|\xi - \mu| < k\sigma] \geq 1 - \frac{1}{k^2}$
- Siendo expresiones equivalentes
- $\mathrm{P}[\mu - k < \xi < \mu + k] \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2}$
- $\mathrm{P}[\mu - k\sigma < \xi < \mu + k\sigma] \geq 1 - \frac{1}{k^2}$

Textos recomendados

- Cap. 2 y 4. Martín-Pliego, *Fundamentos de Probabilidad*, Paraninfo, 2010, 3ª Edición

Prácticas recomendadas

- Ejercicios Martín-Pliego
- Ejercicios resueltos en clase
- Prácticas y recursos web (aula virtual)