

2. VARIABLE ALEATORIA

Estadística I

Dr. Francisco Rabadán Pérez

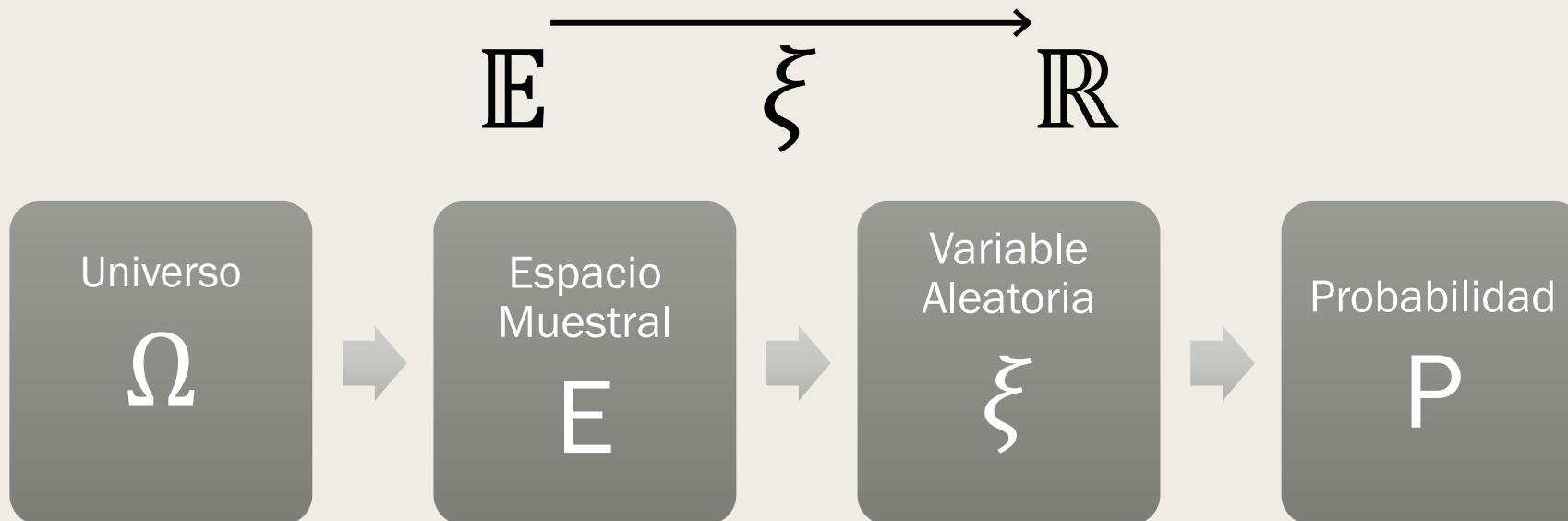
Índice

1. Variable Aleatoria
2. Función de Distribución
3. Variable Aleatoria Discreta
4. Variable Aleatoria Continua
5. Esperanza Matemática
6. Momentos
7. Varianza
8. CV de Pearson
9. Variable Tipificada
10. Teorema de Chebycheff



1. Variable Aleatoria

- Variable aleatoria o variante (que representamos por la letra ξ) es una aplicación del espacio muestral en el conjunto de números reales que conserva la medida de probabilidad.



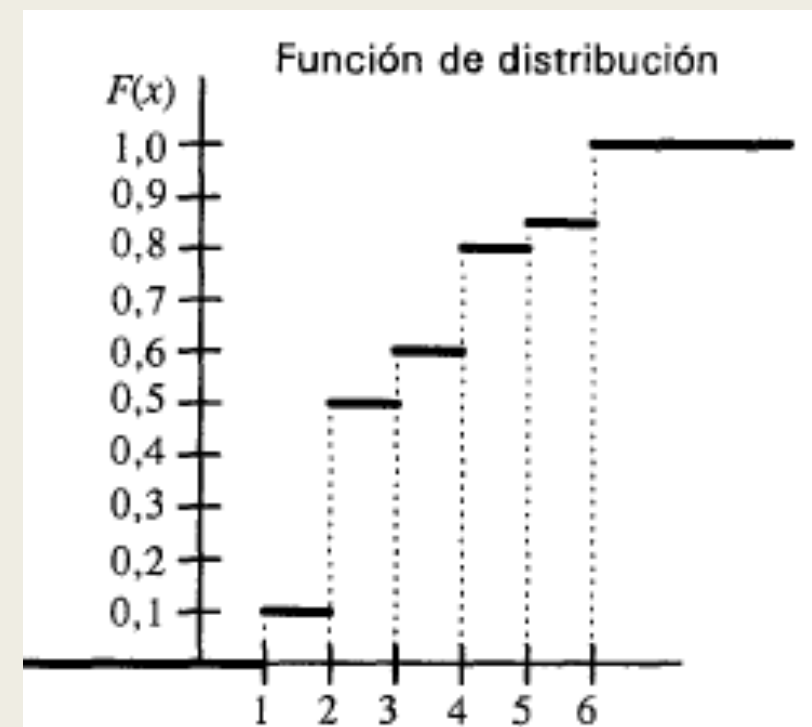
2. Función de Distribución

- Mide la probabilidad acumulada hasta un punto de la variable aleatoria

$$F(X) = P(\xi \leq x)$$

- Propiedades:

1. $F(-\infty) = 0$
2. $F(+\infty) = 1$
3. $F(b) - F(a) = P(a < \xi \leq b)$
4. $F(x)$ es no decreciente $F(x + \Delta(x)) \geq F(x) \quad \forall x$
5. $F(x)$ es continua por la derecha



3. Variable Aleatoria Discreta (VAD)

- VAD: Dados dos puntos cualesquiera de la VA, entre ellos tenemos un número finito de puntos.
 - *En algunos casos se verifica que $\frac{CF}{CP} > 0$, y a este cociente no nulo le denominamos masa o cuantía de probabilidad en el punto*
- Función de cuantía: $P_i = P(\xi = x_i)$
 - *P-I) $P_i \geq 0$;*
 - *P-II) $\sum_{i=1}^n P_i = 1$*
- Función de Distribución: $F(X) = P(\xi \leq x)$ es
 - *función escalonada con tramos costantes y discontinuidades por la izquierda en los puntos en que existe probabilidad no nula.*
 - *La amplitud de las discontinuidades coincide con la probabilidad en el punto.*

3. Variable Aleatoria Discreta (VAD)

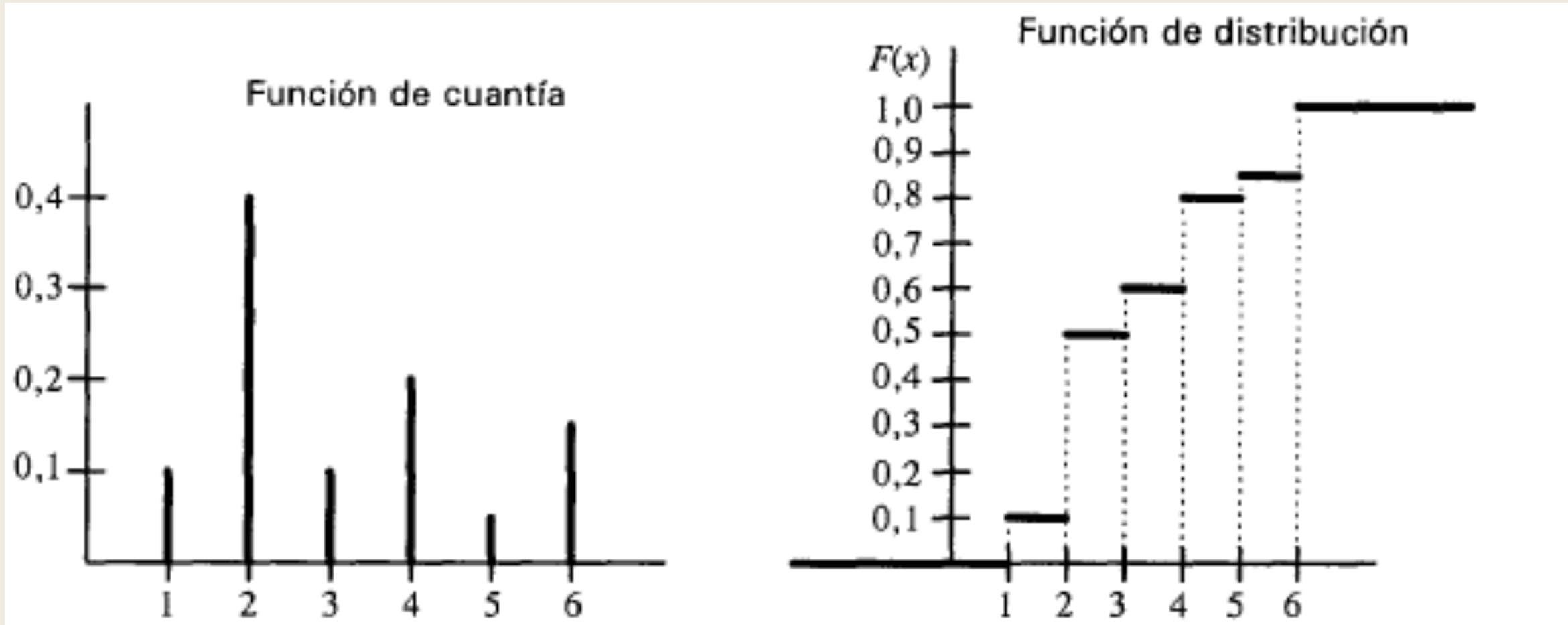
Función de cuantía

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(\xi = x_i)$	0,10	0,40	0,10	0,20	0,05	0,15

Función de distribución

x_i	1	2	3	4	5	6
$\sum_{i=1}^6 P(\xi \leq x_i)$	0,10	0,50	0,60	0,80	0,85	1,00

3. Variable Aleatoria Discreta (VAD)



4. Variable Aleatoria Continua(VAC)

- VAC: Dados dos puntos cualesquiera de variable aleatoria entre ellos encontramos un número infinito de puntos.
- Y por tanto, La función de cuantía será nula para todo el recorrido de la VA.

$$P_i = P(\xi = x_i) = 0 \leftrightarrow \frac{CF}{\infty} = 0$$

- Sin embargo, la Función de Distribución de una VAC es continua (por la derecha y por la izquierda).
- Aunque no la probabilidad para un punto es siempre cero, si podemos calcular probabilidad para intervalos.
- Por eso analizamos la densidad de probabilidad: cociente masa de probabilidad entre amplitud de intervalo de VA.
- Si el intervalo es infinitamente pequeño coincide con el diferencial de x (dx).
- La función de densidad de probabilidad mide la proporción de masa de probabilidad respecto del diferencial de x.

4. Variable Aleatoria Continua(VAC)

■ Función de densidad $f(x)$:

– $f(x) = F'(x)$

– $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$

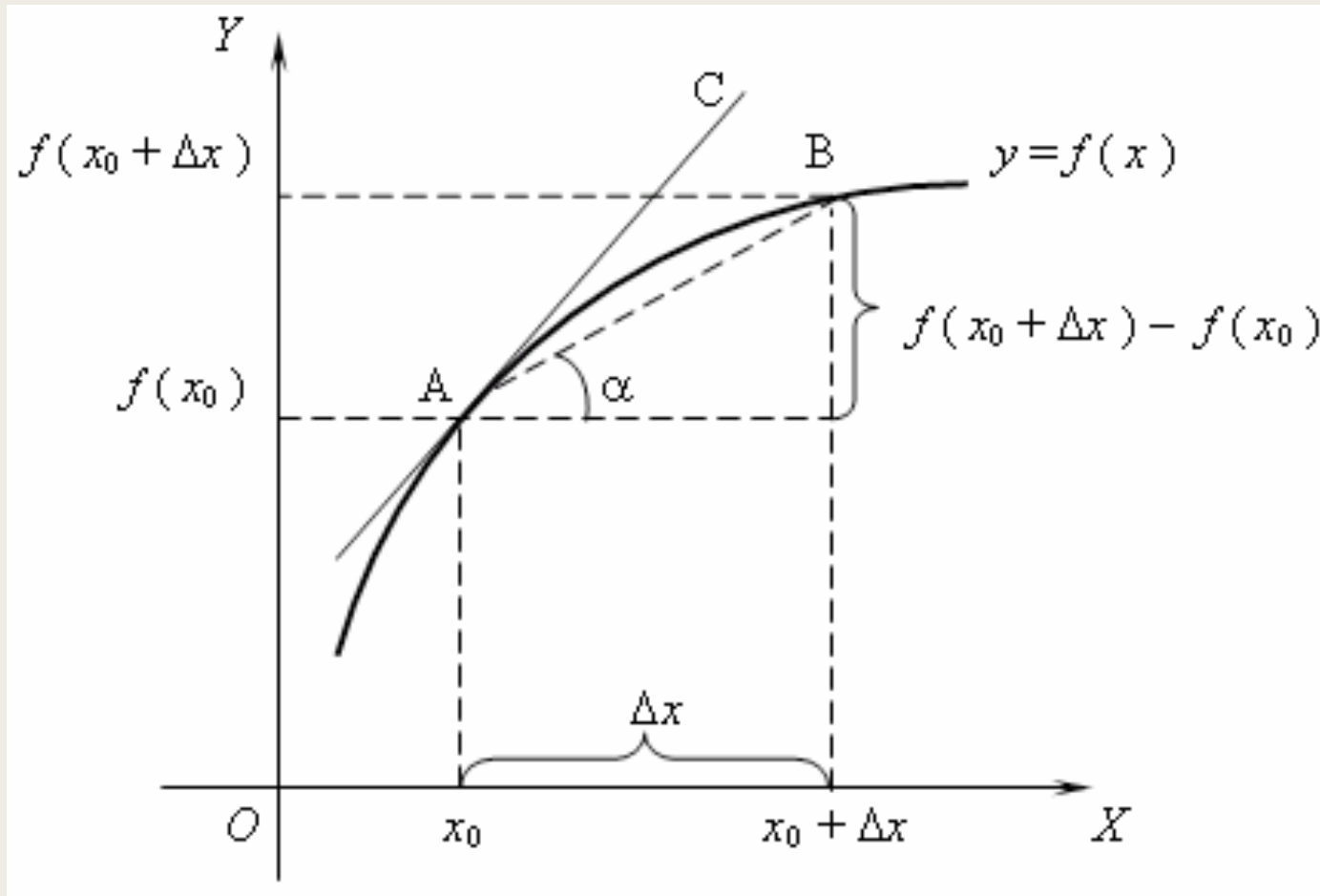
■ Cumple dos propiedades:

– $f(x) > 0 \quad \forall x$

– $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$; *Expresa que la suma de todas las probabilidades es la unidad, siendo la probabilidad elemental en continuidad $f(x)dx$.*

4. Variable Aleatoria Continua(VAC)

- Función de densidad $f(x)$: $f(x) = F'(x)$



Ejemplo de derivada

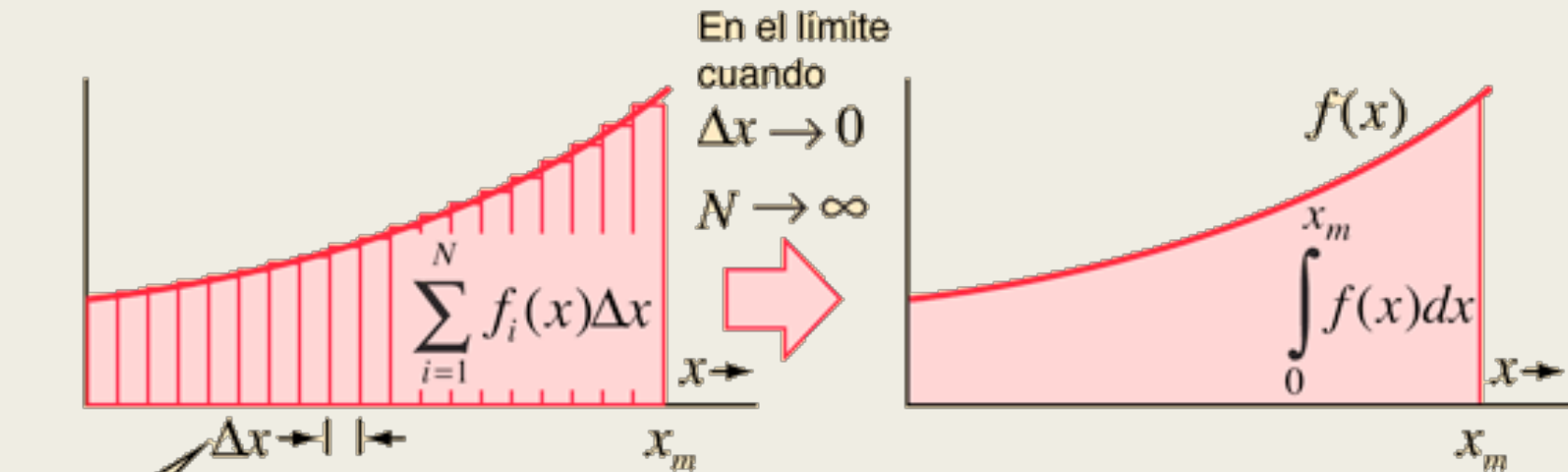
Fte:

<http://blog.espol.edu.ec/guifecep/derivada/>

4. Variable Aleatoria Continua(VAC)

- Función de densidad $f(x)$: $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$

La suma se convierte en la integral



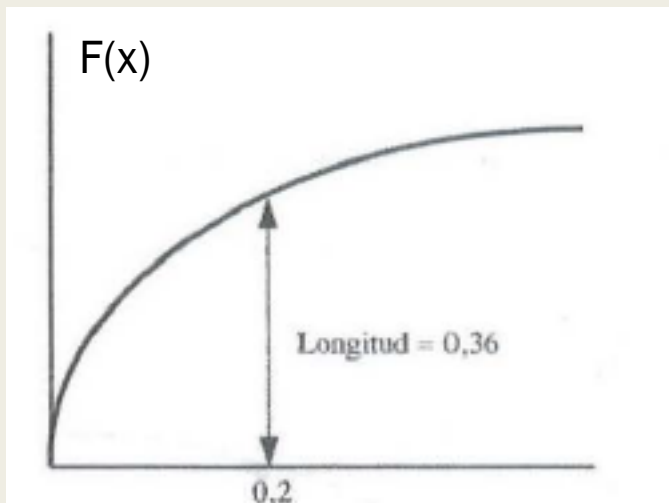
Fuente:

<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbases/integ.html>

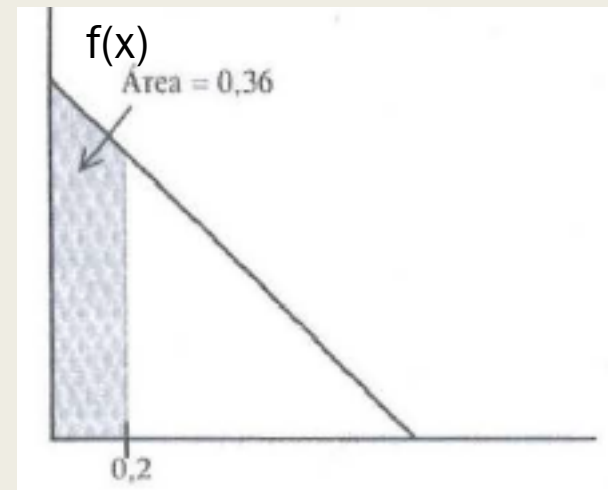
$$\text{Área} = \int_0^{x_m} f(x)dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N f_i(x)\Delta x$$

4. Variable Aleatoria Continua(VAC)

- A efectos nemotécnicos, dados dos puntos a y b de la VAC:
 - $F(x)$ mide probabilidades como incrementos $F(b)-F(a)$: incremento de probabilidad entre dos puntos (a,b).
 - Integrar $f(x)$ proporciona probabilidades como áreas : $\int_a^b f(x)dx$



Función de distribución



Función de densidad

5. Esperanza Matemática

- Esperanza Matemática (μ): coincide con el valor de la media aritmética poblacional cuando el número de experimentos aleatorios tiende a infinito. Por tanto lo consideramos valor esperado supuesta la convergencia absoluta.
- Cálculo: $\mu = \alpha_1$
 - VAD: $\mu = \alpha_1 = \sum_i x_i P_i$
 - VAC: $\mu = \alpha_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$

5. Esperanza Matemática

■ Propiedades (Operador Esperanza).

$$1. E(k) = k$$

$$2. E(\xi \pm k) = E(\xi) \pm k$$

$$3. E(k\xi) = kE(\xi)$$

$$4. E(\xi \pm \eta) = E(\xi) \pm E(\eta)$$

$$5. E(\xi * \eta) = E(\xi) * E(\eta) \leftrightarrow \xi, \eta \text{ independientes}$$

5. Esperanza Matemática

- Generalización de la esperanza $E(g(x))$: podemos calcular el valor esperado de cualquier función si conocemos el valor esperado de las va independientes a través de las propiedades de la esperanza.

$$E[g(x)] = \begin{cases} \sum_i g(x_i)P_i ; VAD \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx ; VAC \end{cases}$$

6. Momentos de la VA

■ Respecto al Origen

$$\alpha_r = E(\xi^r) = \begin{cases} \sum_i x_i^r P_i ; VAD \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx ; VAC \end{cases}$$

■ Respecto a la Esperanza

$$\mu_r = E(\xi - \alpha_1)^r = \begin{cases} \sum_i (x_i - \alpha_1)^r P_i ; VAD \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \alpha_1)^r f(x) dx ; VAC \end{cases}$$

6. Momentos de la VA

- Momentos respecto a la esperanza importantes

- Varianza
$$\mu_2 = \sigma^2 = E(\xi - \alpha_1)^2 \begin{cases} \sum_i (x_i - \alpha_1)^2 P_i ; VAD \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \alpha_1)^2 f(x) dx ; VAC \end{cases}$$

- Para construir g_1 y g_2

$$\mu_3 = E(\xi - \alpha_1)^3$$

g_1 es coeficiente de asimetría

$$\mu_4 = E(\xi - \alpha_1)^4$$

g_2 es coeficiente de curtosis

6. Momentos de la VA

■ Relación entre μ_r y α_r

$$\mu_1 = E(\xi - \alpha_1)^1 = \alpha_1 - \alpha_1 = 0$$

$$\mu_2 = \sigma^2 = E(\xi - \alpha_1)^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$$

Varianza

$$\mu_3 = E(\xi - \alpha_1)^3 = \alpha_3 - \alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_1^3$$

$$\mu_4 = E(\xi - \alpha_1)^4 = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 - 2\alpha_1^4$$

$$\mu_r = E(\xi - \alpha_1)^r = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-\alpha_1)^k \alpha_{r-k}$$

7. Varianza y desviación típica de la VA

- Llamamos **Varianza** al momento central de segundo orden

$$\sigma^2 = \mu_2 = E(\xi - \alpha_1)^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$$

- Mide las desviaciones cuadráticas de la VA respecto a la esperanza
- La **desviación típica** traslada la varianza a unidades comparables con la esperanza.

$$\sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\sigma^2}$$

7. Varianza de la VA

■ Propiedades (Operador Varianza).

1. $V(\xi) \geq 0$

2. $V(k) = 0$

3. $V(\xi \pm k) = V(\xi)$

4. $V(k\xi) = k^2 V(\xi)$

5. $V(\xi \pm \eta) = V(\xi) + V(\eta) \pm 2Cov(\xi, \eta)$

6. ξ, η independientes $\rightarrow V(\xi \pm \eta) = V(\xi) + V(\eta)$

7. Varianza de la VA

- Generalización a $g(x)$ (Operador Varianza).

$$V(g(x)) = E[g(x) - E(g(x))]^2 =$$

$$= \begin{cases} \sum_i (g(x_i) - E(g(x_i)))^2 P_i ; VAD \\ \int_{-\infty}^{\infty} (g(x) - E(g(x)))^2 f(x) dx ; VAC \end{cases}$$

8. Coeficiente de Variación de Pearson

- Permite establecer una medida adimensional de la dispersión relativa de cada VA

$$CV_{\xi} = \frac{\sigma}{|\mu|} = \frac{\sigma}{|\alpha_1|}$$

- Permite:
 - *comparar dispersiones relativas entre varias VA's.*
 - *Medir el nivel de representatividad de la esperanza y el nivel de dispersión, tal y como vimos en el tema de descriptiva de medidas de dispersión.*

9. Variable Tipificada

- Podemos trasladar cualquier VA ξ a una distribución equivalente ξ^* de esperanza cero y desviación típica 1 mediante la siguiente transformación

$$\xi^* = \frac{\xi - \mu}{\sigma}$$

- ξ^* mide las desviaciones de ξ respecto de la esperanza tomando como unidad de medida la desviación típica
 - *El signo indica si la desviación está por encima de la media ($\xi^* > 0$), o por debajo ($\xi^* < 0$)*

10. Teorema de Chebycheff

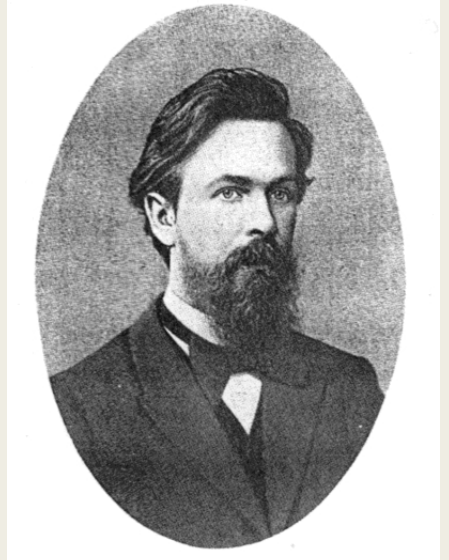
- Permite fijar una cota de probabilidad para la VA sin que sea necesario conocer la distribución de probabilidad asociada.
- Es un caso particular de la **desigualdad de Markov** (discipulo de Chebycheff) siendo $g(\xi)$ función no negativa, y λ una constante positiva se cumple que:

$$P(g(\xi) \geq \lambda) \leq \frac{E[g(\xi)]}{\lambda}$$

- **Desigualdad de Chebycheff:**

si hacemos que $g(\xi) = (\xi - \mu)^2 \geq 0$, y siendo $E[(\xi - \mu)^2] = \sigma^2$, obtenemos

$$P((\xi - \mu)^2 \geq \lambda) \leq \frac{\sigma^2}{\lambda}$$



Andréi Andréyevich Márkov
(1856-1922)



Pafnuti Lvóvich Chebyshev (1821-1894)

10. Teorema de Chebycheff

$$P((\xi - \mu)^2 \geq \lambda) \leq \frac{\sigma^2}{\lambda}$$

- **Significado y utilidad del teorema:**
- Nos permite acotar la probabilidad de que la VA se aleje de la esperanza en términos absolutos una cierta cantidad.
- Acota la probabilidad de que una variable tome un valor dentro (o fuera) de un intervalo simétrico en torno a la media sin necesidad de conocer como se distribuye la VA en términos de probabilidad. **Sólo necesitamos conocer la varianza.**

10. Teorema de Chebycheff

$$P((\xi - \mu)^2 \geq \lambda) \leq \frac{\sigma^2}{\lambda}$$

■ Algunas transformaciones útiles:

- $\lambda = k^2; k > 0 \rightarrow P[|\xi - \mu| \geq k] \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$
- $\lambda = k^2 \sigma^2; k\sigma > 0 \rightarrow P[|\xi - \mu| \geq k\sigma] \leq \frac{1}{k^2}$
- Pasando al complementario $P[|\xi - \mu| < k\sigma] \geq 1 - \frac{1}{k^2}$
- Siendo expresiones equivalentes
- $P[\mu - k < \xi < \mu + k] \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2}$
- $P[\mu - k\sigma < \xi < \mu + k\sigma] \geq 1 - \frac{1}{k^2}$

Apéndice:

Estadística Descriptiva			Discreta	Continua
Frecuencia relativa	f_i	Probabilidad elemental	$P(\xi = x)$	$dF(x) = f(x)dx$
Frecuencia Relativa Acumulada	F_i	Función de Distribución $P(\xi \leq x)$	$P(\xi \leq x) = \sum_{i=1}^x P(\xi = x)$	$F(x) = \int_{-\infty}^x xf(x) dx$
Media aritmética	$\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i f_i$	Esperanza matemática	$\mu = E(\xi) = \sum_{i=1}^n x_i P(\xi = x)$	$\mu = E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$
Varianza	$s_x^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 f_i$	Varianza	$\sigma^2 = E[(\xi - \mu)^2] = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 P(\xi = x)$	$\sigma^2 = E[(\xi - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$
Momentos respecto al origen	$a_1 = \bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i f_i$ $a_2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 f_i$	Momentos respecto al origen	$\alpha_1 = \mu = E(\xi) = \sum_{i=1}^n x_i P(\xi = x)$ $\alpha_2 = E(\xi^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 P(\xi = x)$	$\alpha_1 = E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$ $\alpha_2 = E(\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$
Momentos respecto a la media o centrales	$m_1 = 0$ $m_2 = s_x^2 = a_2 - a_1^2$	Momentos respecto a la esperanza o centrales	$\mu_1 = 0$ $\mu_2 = \sigma^2 = E[(\xi - \mu)^2] = \alpha_2 - \alpha_1^2$ $\mu_3 = E[(\xi - \mu)^3]$ $\mu_4 = E[(\xi - \mu)^4]$	
CV Pearson	$CV = \frac{s_x}{ \bar{x} }$	CV Pearson	$CV = \frac{\sigma}{ \mu }$	
C. Asimetría (CAF)	$g_1 = \frac{m_3}{s^3}$	C. Asimetría (CAF)	$g_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$	
C. Curtosis (CCF)	$g_2 = \frac{m_4}{s^2} - 3$	C. Curtosis (CCF)	$g_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^2} - 3$	

Textos recomendados

- Cap. 2 y 4. Martín-Pliego, *Fundamentos de Probabilidad*, Paraninfo, 2010, 3ª Edición

Prácticas recomendadas

- Ejercicios Martín-Pliego
- Ejercicios resueltos en clase
- Prácticas y recursos web (aula virtual)

