1. PROBABILIDAD

Estadística I

Dr. Francisco Rabadán Pérez

Índice

1. Introducción

- **Aleatoriedad vs. Determinismo**:
  - *Fenómeno determinista: cuando se reproduce bajo las mismas condiciones podemos predecir con certeza el resultado.*
  - *Fenómeno aleatorio: Sólo conocemos el resultado una vez realizado el experimento, u observado el resultado.*
- Probabilidad: medida del grado de certidumbre.

Fuente:
http://lugiland.blogspot.com.es/2014/02/alegoria-de-la-perturbacion-causada-por.html

1. Introducción

- **Probabilidad:** medida del grado de certidumbre.
- Estadística :

– ***Descriptiva***: *recogida, ordenación y análisis de la información disponible.*

– ***Inferencia***: *Generalización a la población, contraste de hipótesis,... conjunto de herramientas para la toma de decisiones en ambiente de incertidumbre.*

Fuente: http://lugiland.blogspot.com.es/2014/02/alegoria-de-la-perturbacion-causada-por.html

2. Experimento aleatorio

- **Experimento**: reproducción del fenómeno para observar sus resultados.
  - *Se supone que el experimento puede repetirse en las mismas condiciones y que todos los posibles resultados son conocidos.*
- **Tipos de Experimento**:
  - ***Determinista***: *al repetirlo bajo las mismas condiciones se obtiene siempre el mismo resultado.*
  - ***Aleatorio***: *al repetirlo en análogas condiciones no se puede predecir el resultado.*

Erwin Schrödinger (1881-1961) Colapso de la función de onda

Werner Heisenberg (1901-1976) y el Principio de indeterminación

2. Experimento aleatorio

- **¿Cuáles de estos fenómenos pueden ser experimentos aleatorios?:**

– *Sacar una carta de una baraja*

– *Abrir las compuertas de un estanque lleno de agua.*

– *Lanzar una moneda sobre el suelo y anotar el resultado del número de caras que aparecen*

– *Arrojar una piedra al vacío y medir su aceleración.*

– *Medir una longitud de una circunferencia de radio 5 m.*

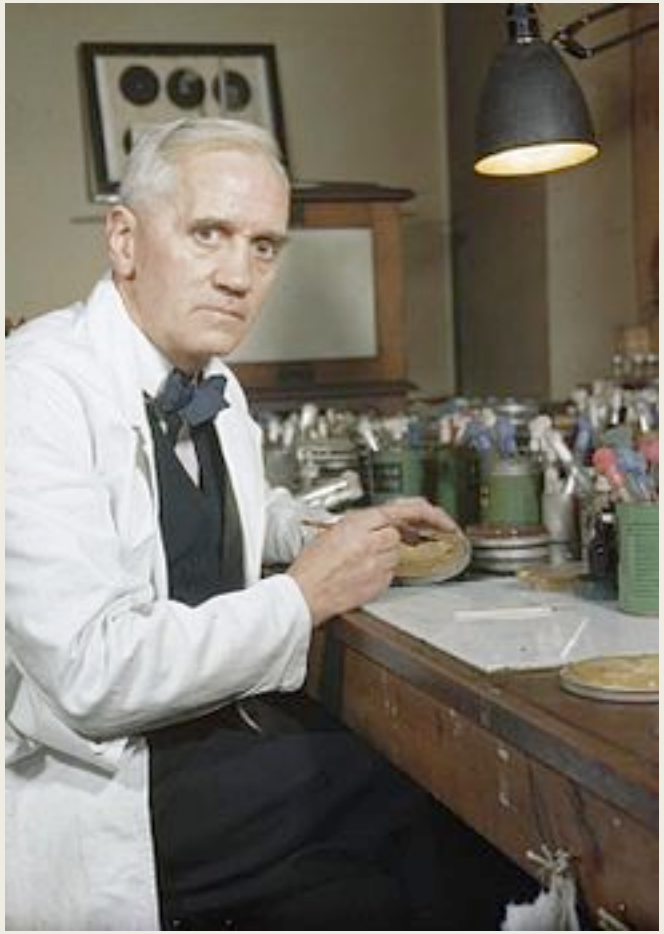
– *Quitar el freno de mano de un coche cuesta abajo.*

– *Lanzar un dado*

– *Abrir un libro al azar y anotar la página situada en el margen derecho.*

3. Probabilidad

- **La incertidumbre que se genera en un fenómeno aleatorio no tiene por qué ser la misma para todos los experimentos.**
  - *Lanzamiento de un dado perfecto: resultados equiprobables*
  - *Extracción de una baraja trucada: no hay equiprobabilidad. Cada extracción tiene una probabilidad diferente.*



Alexander Fleming (1881-1955)
Nobel descubridor de la penicilina

4. Sucesos

- **Espacio muestral** (**E**) :conjunto de todos los resultados posibles conocidos del experimento aleatorio.
- **Suceso** (**S**): Cada uno de los resultados posibles del experimento aleatorio.

Suceso elemental
- Elementos de **E**

Suceso compuesto
- Subconjunto de los elementos de **E**

Suceso Cierto
- **E** . Siempre se realiza

Suceso Imposible
- No **E**. Nunca se realiza

Sucesos Complementarios:
- Cuando no se realiza uno, se realiza el otro.

4. Sucesos

- Ejemplos con lanzamientos de un dado.

Suceso elemental

- $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}$

Suceso compuesto

- $\{1,3,5\},\{2,1,4\},\{5,4,1,6,2,\ldots.\},\ldots$

Suceso Cierto

- $\{1,2,3,4,5,6\}$

Suceso Imposible

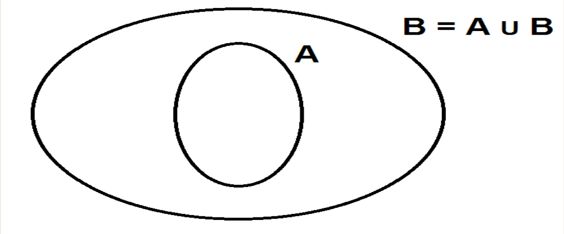
- $E^C = \emptyset.\ \{-1\},\{23\}$

Sucesos Complementarios:

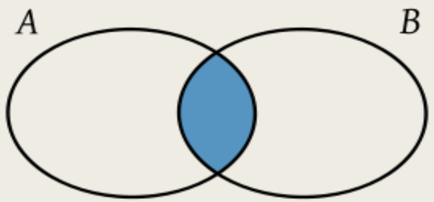
- E=$\{1,2,3\},\{4,5,6\}$

5. Operaciones con Sucesos

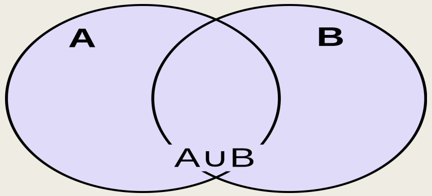
A incluido en B



A intersección B



A Unión B

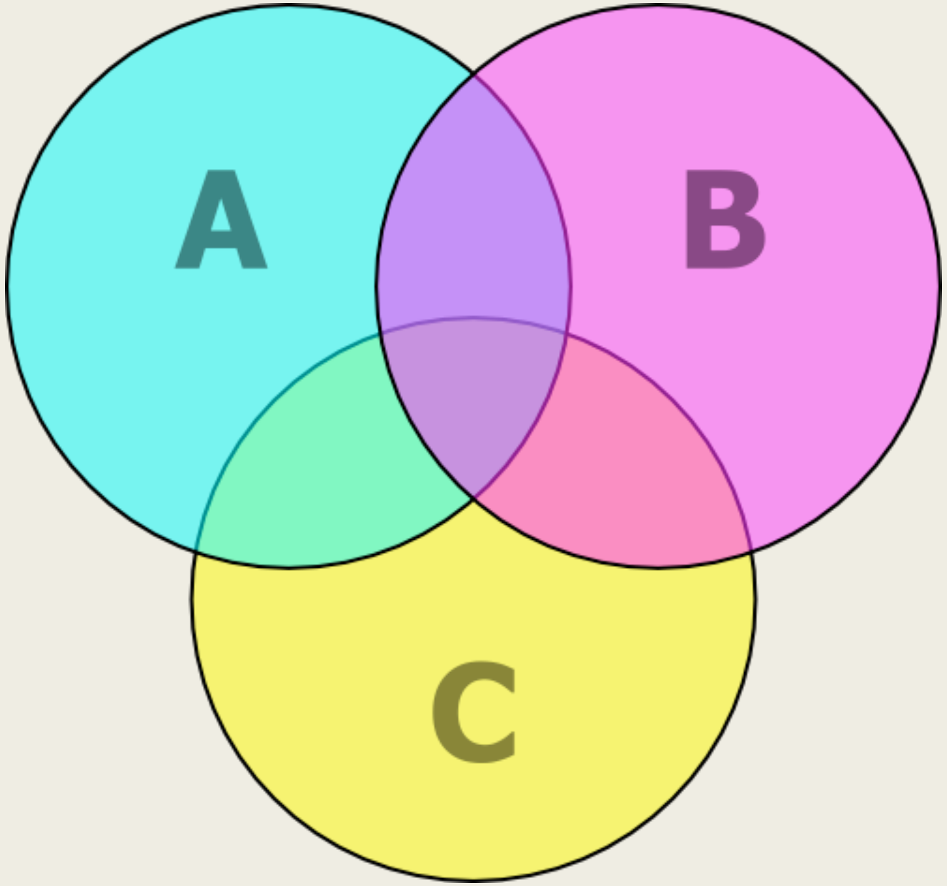


Fuente: wikimedia

Operación	Expresión Matemática	Interpretación
Inclusión	$A \subset B$	Siempre que se realiza A, se realiza B.
Igualdad	$A = B$ $A = B \leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$	Siempre que se realiza A, se realiza B, y siempre que se realiza B se realiza A.
Unión	$A \cup B$	Se realiza A **ó** se realiza B
Intersección	$A \cap B$	Se realiza A **y** se realiza B
Incompatibles	$CN: A \cap B = \emptyset$	A y B no pueden darse simultáneamente

5. Sucesos: Propiedades de la unión e Intersección

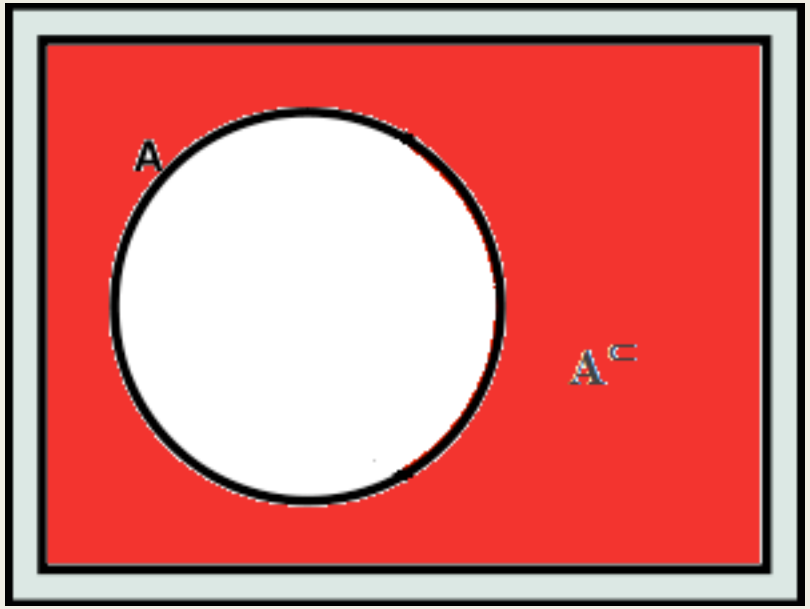
Propiedad	Expresión Matemática
Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Asociativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Distributiva	$A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap C$ $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup C$



Fuente: https://firebird21.wordpress.com/2013/08/06/teoria-de-conjuntos-union-interseccion-diferencia/

5.4. Suceso Complementario

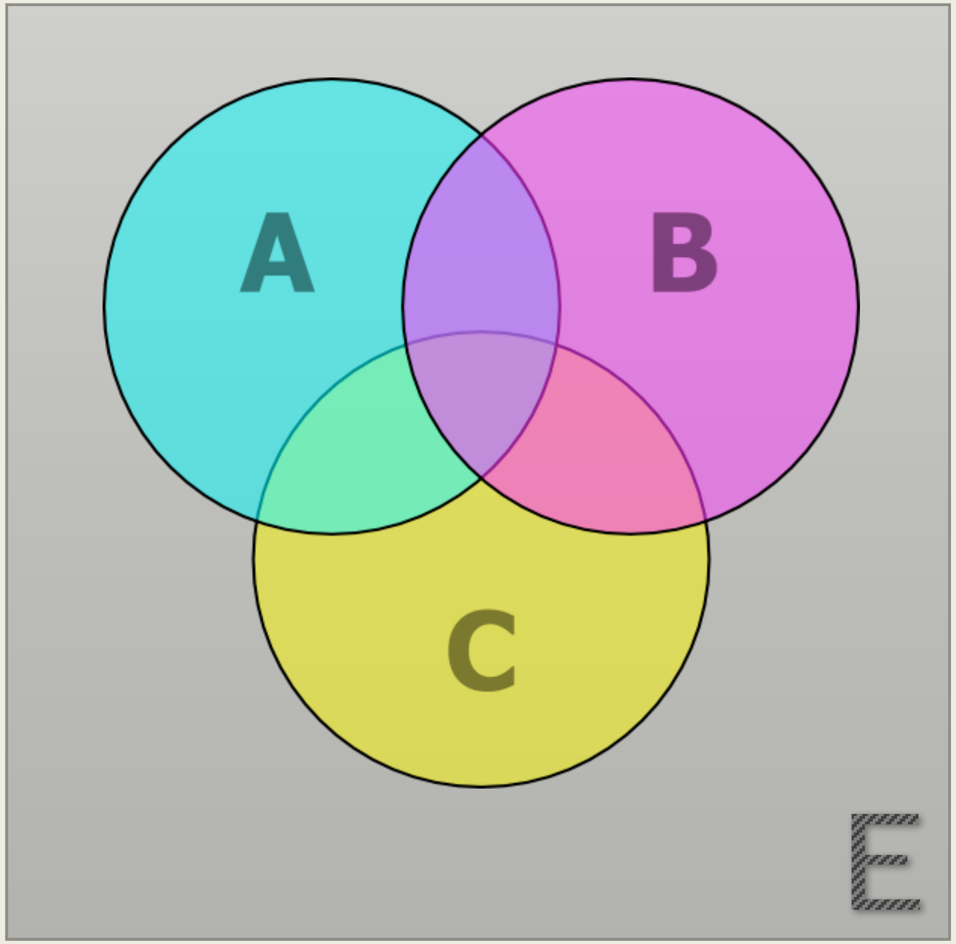
$$A^C = E - \{A\}$$
$$A^C \cup A = E$$
$$A^C \cap A = \emptyset$$



Fuente: http://tsu-estadistica.blogspot.com.es/2013/02/eventos-aleatorios-y-espacio-muestral.html

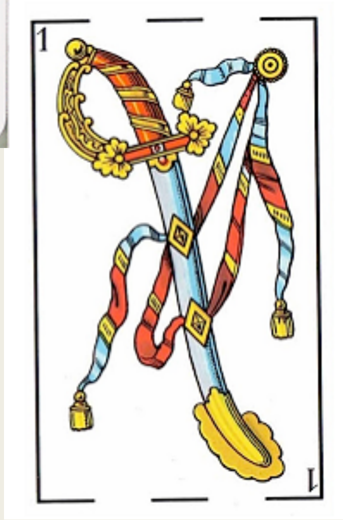
5. Sucesos: Leyes de Morgan

Sucesos	Expresión Matemática
A y B	$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$
N sucesos	$\left(\bigcup_n S_i\right)^C = \bigcap_n S_i^c$ $\left(\bigcap_n S_i\right)^c = \bigcap_n S_i^c$



5. Sucesos: Propiedades de la unión e Intersección

- Ejemplo: experimento consistente en sacar una carta de la baraja española.
- Sucesos:
  - *A: sacar un oro*
  - *B: sacar un as*
  - *C: sacar rey de copas o as de espadas.*
- $A \cup B$: sacar oro o as → 13 cartas favorables
- $A \cup C$: sacar oro, o rey de copas, o as de espadas → 12 cartas favorables.
- $B \cup C$: sacar as, o rey de copas o as de espadas → 5 cartas favorables



Fuente: http://tsu-estadistica.blogspot.com.es/2013/02/eventos-aleatorios-y-espacio-muestral.html

6. Concepto de probabilidad

- **Probabilidad Clásica: Laplace**
- – *Supuesto: Equiprobabilidad*

$$P = \frac{CF}{CP}$$

- Propiedades:

P-I	• $\left.\begin{matrix} P(S) \geq 0 \\ P(S) \leq 1 \end{matrix}\right\} \rightarrow 0 \leq P(S) \leq 1$
P-II: Aditividad (Unión finita)	• $S_1 \cap S_2 = \emptyset \rightarrow$ • $P(S_1 \cup S_2) = P(S_1) + P(S_2)$
P-III	• $P(S^C) = 1 - P(S)$

Pierre-Simon Laplace
(1749-1827)

6. Concepto de probabilidad

- **Probabilidad Clásica: Laplace**

$$P = \frac{CF}{CP}$$

Consecuencias:

- **No hay incertidumbre**, sólo falta de información.
- Supuesto de **equiprobabilidad**.
- **Limitación**: el número de casos posibles ha de ser finito y conocido.

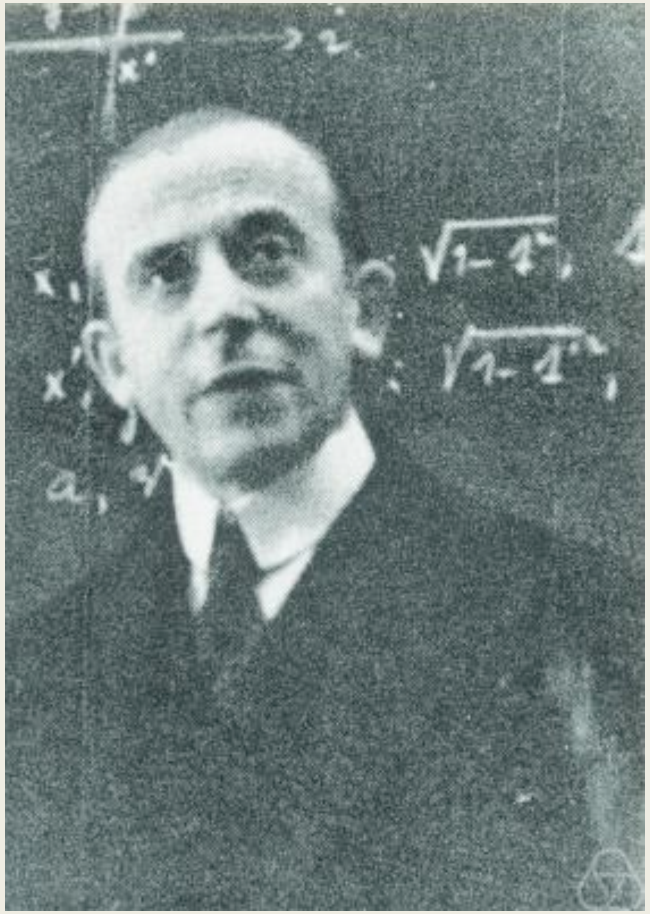
Pierre-Simon Laplace
(1749-1827)

6. Concepto de probabilidad

- **Probabilidad Frecuencialista: R. Von Mises**

$$\boxed{P = \lim_{n\to\infty} \frac{n_i}{N} = \lim_{n\to\infty} f_i}$$

- Se basa en la experimentación. La incertidumbre se encuentra en la naturaleza y se refleja en el experimento.
- Repetición del experimento n veces, de forma independiente.
- Aumentando indefinidamente el número de veces que se repite el experimento, la probabilidad es el número al que tiende este cociente → <u>La probabilidad es una medida</u>.



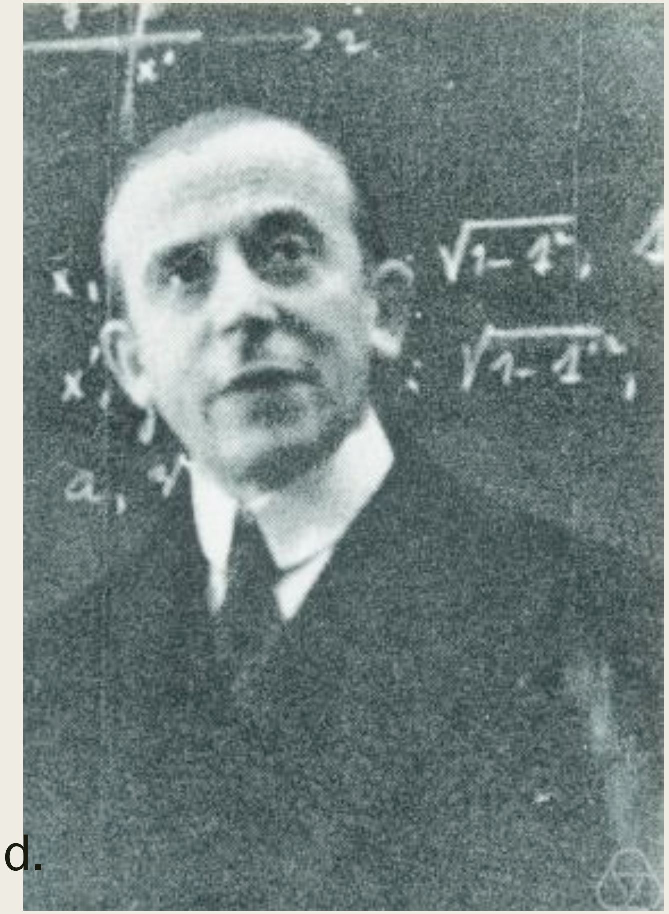
Richard Edler von Mises
(1883-1953)

6. Concepto de probabilidad

Probabilidad Frecuencialista: R. Von Mises

$$\boxed{P = \lim_{n\to\infty} \frac{n_i}{N} = \lim_{n\to\infty} f_i}$$

- De las propiedades de las frecuencias relativas deducimos:
- $0 \leq \frac{n_i}{N} \leq 1 \rightarrow 0 \leq P(S_i) \leq 1$
- $S_1 \cap S_2 = \emptyset, f(S_1, S_2) = \frac{n_1+n_2}{N} = f(S_1) + f(S_2) \rightarrow$
  $\rightarrow P(S_1, S_2) = \mathrm{P}(S_1) + \mathrm{P}(S_2)$
- ∃ Límite →para los sucesos que no tienen límite no existe probabilidad.
- Sucesión infinita aleatoria : es imposible en la práctica (difícil desarrollo matemático)
- Concepción Frecuencialista + Clásica → Kolmogorov



Richard Edler von Mises
(1883-1953)

6. Concepto de probabilidad

■ Probabilidad Lógica

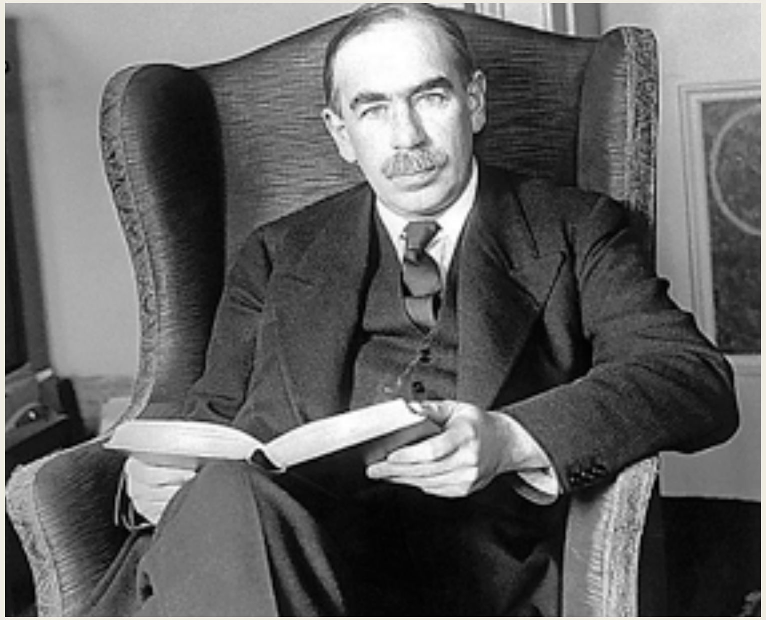
- La probabilidad es parte de la Lógica (Filosofía) y existe como tal, luego no necesita de la experimentación ni de la ocurrencia del suceso.
- Probabilidad: grado de creencia racional asociado a cada proposición (grado de implicación a una premisa).
- ¿Cuantificable?
- Mas en http://epistemicos.blogspot.com.es/2012/03/la-diferencia-entre-probabilidad-logica.html

Rudolf Carnap
(1891-1970)

6. Concepto de probabilidad

Probabilidad Subjetiva

- La incertidumbre se encuentra en el sujeto → subjetiva.
- Probabilidad: grado de creencia personal que el sujeto tiene del resultado de un fenómeno aleatorio relacionado con:
  - *La experiencia personal acumulada*
  - *Las creencias personales*
  - *Las diferentes alternativas.*
- Varía entre distintos sujetos, y para el mismo sujeto a lo largo del tiempo.
- Basada en apuestas.
- Importante: incorpora las modificaciones en la información (a priori, a posteriori; Estadística Bayesiana)



John Maynard Keynes
(1883-1946)

7. Axiomática del Cálculo de Probabilidades

- Probabilidad Clásica y Frecuencial tienen limitaciones.
- Kolmogorov consigue un planteamiento axiomático (1933) relacionando la teoría de la probabilidad con la teoría de conjuntos y la teoría de la medida

Andréi Nikoláyevich Kolmogórov
(1903-1987)

7. Axiomática del Cálculo de Probabilidades

Algebra de Sucesos

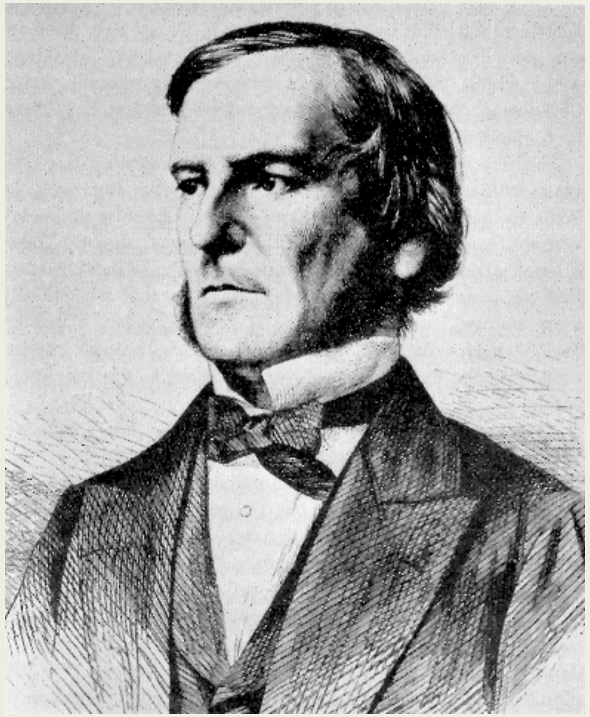
- (E, a) es álgebra de Boole si:

1. $E \in a$

2. $S \in a \rightarrow S^c \in a \rightarrow \emptyset \in a$

3. $S_1, S_2 \in a \; ; S_1 \cup S_2 \in a \rightarrow S_1 \cap S_2 \in a$ *(se extiende facilmente a la intersección finita)*

- σ -álgebra: (E, Ω) es un espacio probabilizable o medible si tiene estructura de σ-álgebra
- $a \; \acute{a}lgebra + \; \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \in Q, \bigcap_{i=1}^{\infty} S_i \in Q$ (numerable)



George Boole
(1815-1864)

7. Axiomática del Cálculo de Probabilidades

Axiomática de Kolmogorov

- Axioma-I: $S \in \Omega \to \exists P(S) \geq 0$
- Axioma-II: $P(E) = 1$
- Axioma-III: Sean $S_1, S_2, \dots S_n$; $S_i \cap S_j = \emptyset \ \forall i \neq j$ (disjuntos dos a dos)

$$\to P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(S_i)$$

- (E, Ω, P) es Espacio de Probabilidad

Andréi Nikoláyevich Kolmogórov (1903-1987)

8. Teoremas del Cálculo de Probabilidades

Teorema I : La probabilidad del suceso imposible es 0.

- $P(\emptyset) = 0$
- Demostración a partir del Axioma-III
- Sean $S_1, S_2, \dots S_n$; $S_i \cap S_j = \emptyset \ \forall i \neq j$ (disjuntos dos a dos)

$$\rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(S_i)$$

- Si $S_i = \emptyset \rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \emptyset\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\emptyset) \leftrightarrow \begin{cases} P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \emptyset\right) = P(\emptyset) \\ \sum_{i=1}^{\infty} P(\emptyset) = 0 \end{cases}$ y

por tanto $P(\emptyset) = 0$

Andréi Nikoláyevich Kolmogórov
(1903-1987)

8. Teoremas del Cálculo de Probabilidades

Teorema II : La probabilidad de la unión de n sucesos disjuntos es igual a la suma de sus probabilidades.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(S_i) \qquad i \neq j$$

- Demostración Axioma-III, considerando $S_{i>n} = \emptyset$

Andréi Nikoláyevich Kolmogórov (1903-1987)

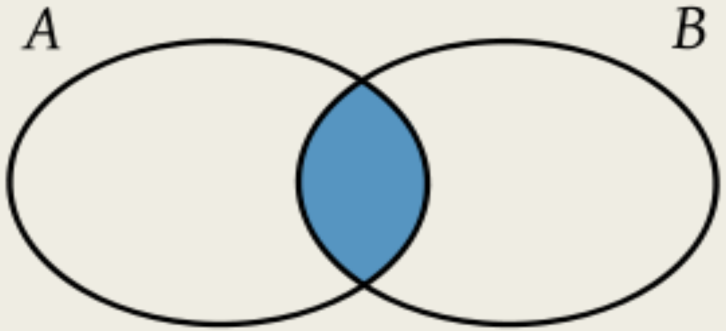
8. Teoremas del Cálculo de Probabilidades

Teorema III : La probabilidad de la unión de n sucesos es igual a la suma de sus probabilidades menos la probabilidad de sus intersecciones.

$$P(S_1 \cup S_2) = P(S_1) + P(S_2) - P(S_1 \cap S_2)$$

- Demostración:

$$S_1 \cup S_2 = [S_1/S_1 incomp(S_1 \cap S_2\ )] \cup [S_2/S_2 incomp(S_1 \cap S_2\ )] \cup (S_1 \cap S_2\ )$$



Andréi Nikoláyevich Kolmogórov (1903-1987)

8. Teoremas del Cálculo de Probabilidades

Teorema IV : La probabilidad del suceso contenedor es mayor que la probabilidad del suceso contenido.

$$S_1 \subset S \rightarrow P(S_1) < P(S)$$

- Demostración:

$$S = [S/S_1 incomp(S\ )] \cup (S \cap S_1\ ) = \left(S \cap S_1^C\right) \cup (S \cap S_1)$$

$$P(S) = P\left(S \cap S_1^C\right) + P(S \cap S_1) \rightarrow P(S) \geq P(S \cap S_1)$$

Como $S_1 \subset S, S \cap S_1 = S_1 \rightarrow P(S) \geq P(S_1)$

Andréi Nikoláyevich Kolmogórov (1903-1987)

8. Teoremas del Cálculo de Probabilidades

Teorema V : La probabilidad del suceso es igual o inferior a la unidad.

$$P(S) \leq 1$$

- Demostración a partir del Teorema IV:

$$S \subset E \underset{T-IV}{\Longrightarrow}, P(E) \geq P(S) \rightarrow P(S) \leq 1$$

Andréi Nikoláyevich Kolmogórov (1903-1987)

9. Probabilidad Condicional

La probabilidad cambia al incorporar información

$$P\left(\frac{S_1}{S}\right) = \frac{P(S_1 \cap S)}{P(S)}$$

- Demostración:

$$S \cup S^c = E \rightarrow P(S \cup S^c) = P(E) \rightarrow$$

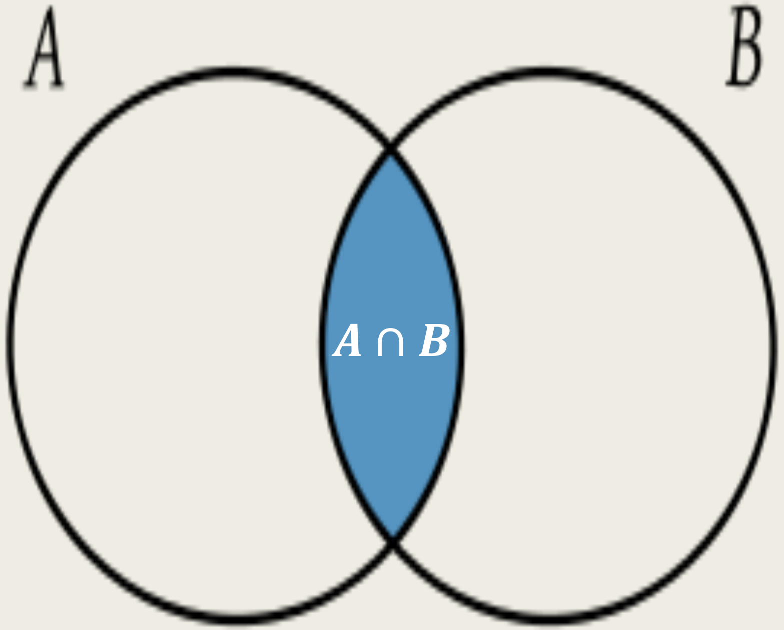
$$P(S) + P(S^c) = P(E) = 1 \rightarrow P(S^c)=1- P(S)$$

Thomas Bayes
(1701-1761)

9. Probabilidad Condicional

La probabilidad cambia al incorporar información

$$P\left({}^{S_1}/_{S}\right) = \frac{P(S_1 \cap S)}{P(S)}$$



- Para que la probabilidad condicionada sea probabilidad debe cumplir la axiomática de Kolmogorov
- Axioma-I: $P(S/S_1) \geq 0$
- Axioma-II: $P(E/S) = 1$
- Axioma-III: Sean$\{S_1/S\}, \{S_2/S\}, \dots \{S_n/S\};\ S_i \cap S_j = \emptyset\ \forall i \neq j$ (disjuntos dos a dos)

$$\rightarrow P(\cup_{i=1}^{\infty} S_i/S) = \sum_{i=1}^{\infty} P(S_i/S)$$

- $(E_s = E \cap S, \Omega_s = \Omega \cap S, P_s)$ es Espacio de Probabilidad condicionado a S

9. Probabilidad Condicional

Teorema de la multiplicación

- Dados $S_1, S_2, \ldots S_n$ y consecuencia de $P\left({}^{S_1}/_{S}\right) = \frac{P(S_1 \cap S)}{P(S)}$

$$P\left(\bigcap_n S_i\right) = P(S_1) * P\left({}^{S_2}/_{S_1}\right) * P\left({}^{S_2}/_{S_1 \cap S_2}\right) * \cdots * P\left({}^{S_n}/_{S_1 \cap \cdots \cap S_{n-1}}\right)$$

Thomas Bayes
(1701-1761)

9. Probabilidad Condicional

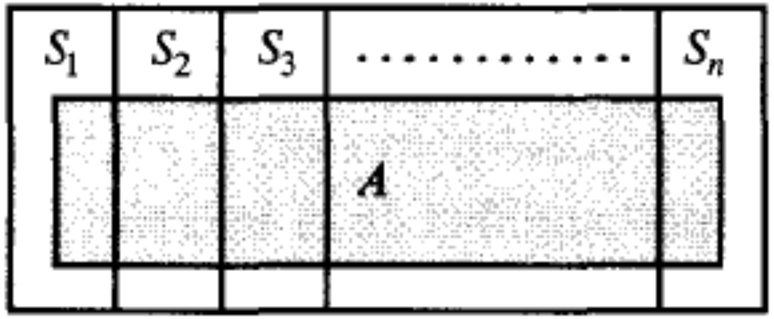
Teorema de la Probabilidad Total

- Dados $S_1, S_2, \ldots S_n$, tal que:
  - $S_i \cap S_j = \emptyset \; \forall i \neq j$
  - $A \cap S_j \neq \emptyset \; \forall i$
  - $\bigcup_n S_i = E$
- Se verifica que:

$$P(A) = \sum P(S_i) * P\left({}^{A}/_{S_i}\right)$$

- Ver demostración en Martín-Pliego (pág. 27).

$$A = A \cap E = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap S_i).$$



Martín-Pliego, Fundamentos de Probabilidad, 2014; pág. 27

9. Probabilidad Condicional

S_i

- Ser hombre o mujer

$P(S_i)$ "a priori"

- P(H)=0,4
- P(M)=0,6

$P(S_i/A)$ Verosimilitud A=fumadir

- P(F/H)=0,2
- P(NF/H)=0,8
- P(F/M)=0,1
- P(NF/M)=0,9

Teorema de la Probabilidad Total

$$P(F) = 0{,}4 * 0{,}2 + 0{,}6 * 0{,}1 = 0{,}14$$

$$P(NF) = 0{,}4 * 0{,}8 + 0{,}6 * 0{,}2 = 1 - 0{,}14 = 0{,}86$$

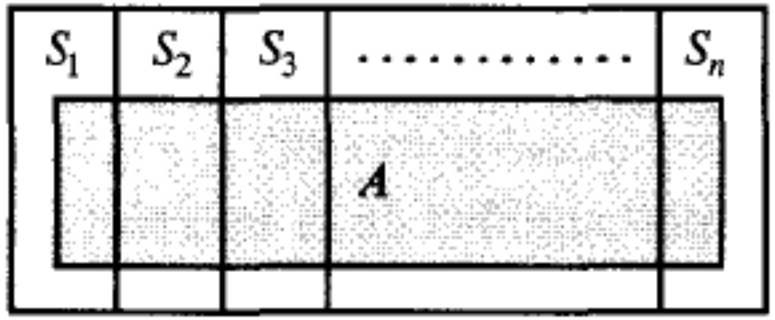
9. Probabilidad Condicional

Teorema de Bayes

- Dados $S_1, S_2, \ldots S_n$, tal que:
  - $P(S_i) > 0$
  - $S_i \cap S_j = \emptyset \; \forall i \neq j$
  - $A \cap S_j \neq \emptyset \; \forall i$
  - $\bigcup_n S_i = E$
- Y un subconjunto de E, denominado A, tal que:
  - $P(A) > 0 \; tal \; que \; A \cap S_i \neq \emptyset \; \forall i$

$$P\left({}^{A}/_{S_i}\right) = \frac{P(S_i) * P\left({}^{A}/_{S_i}\right)}{\sum_i P(S_i) * P\left({}^{A}/_{S_i}\right)}$$

$$A = A \cap E = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap S_i).$$



Martín-Pliego, Fundamentos de Probabilidad, 2014; pág. 27

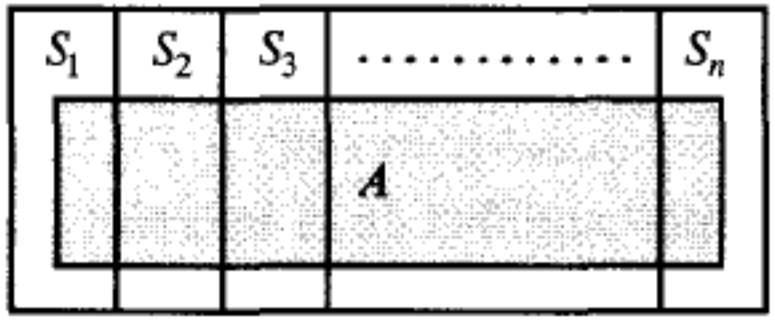
9. Probabilidad Condicional

Teorema de Bayes

$$P\left({}^{S_i}/_{A}\right) = \frac{P(S_i) * P\left({}^{A}/_{S_i}\right)}{\sum_i P(S_i) * P\left({}^{A}/_{S_i}\right)}$$

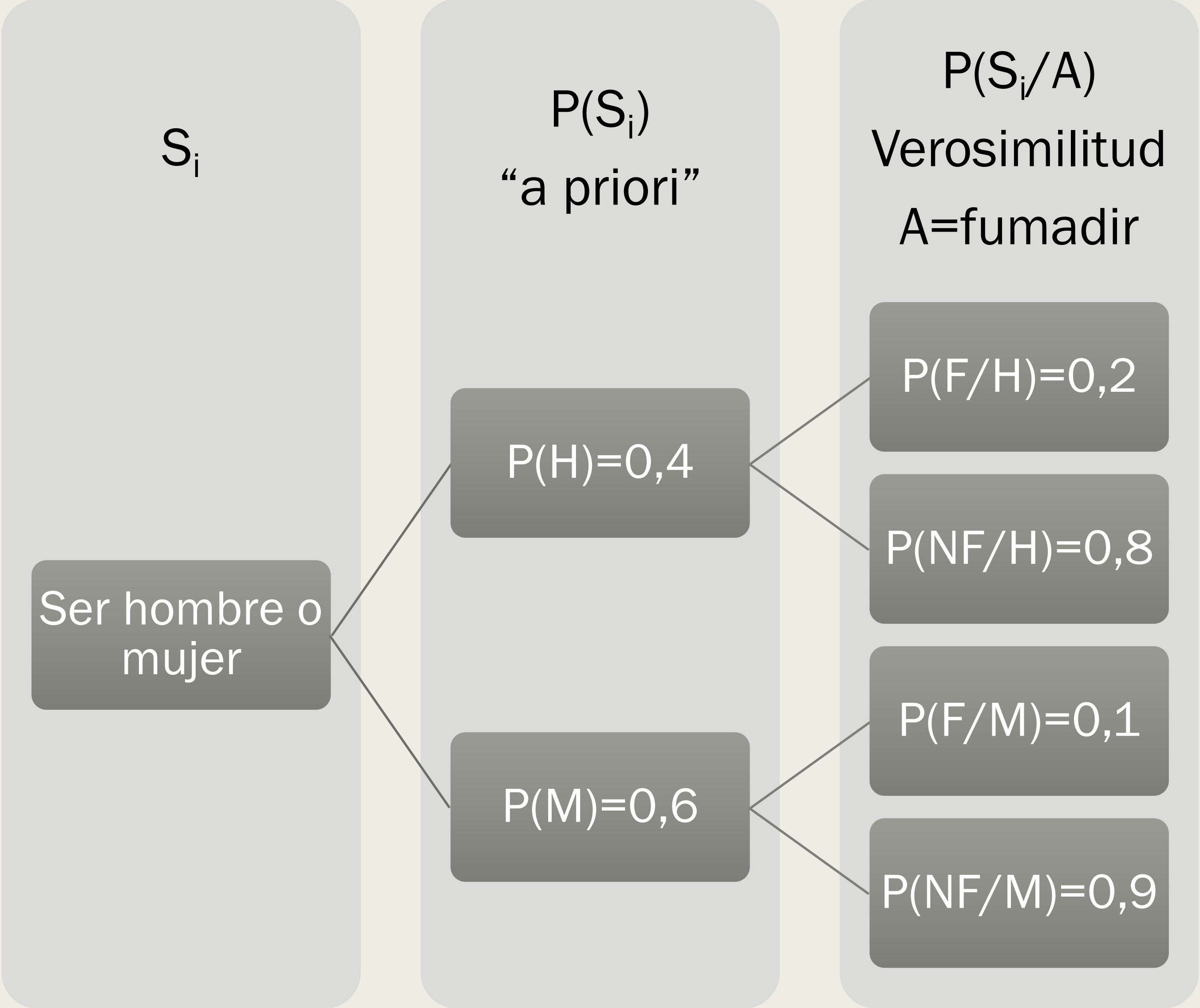
- Interpretación:
  - $P\left({}^{S_i}/_{A}\right)$: *probabilidad "a posteriori"*
  - $P\left({}^{A}/_{S_i}\right)$: *verosimilitud*
  - $P(S_i)$: *probabilidad "a priori"*

$$A = A \cap E = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap S_i).$$



Martín-Pliego, Fundamentos de Probabilidad, 2014; pág. 27

9. Probabilidad Condicional



Teorema de la Probabilidad Total

$$P(F) = 0{,}4 * 0{,}2 + 0{,}6 * 0{,}1 = 0{,}14$$

$$P(NF) = 0{,}4 * 0{,}8 + 0{,}6 * 0{,}2 = 1-0{,}14 = 0{,}86$$

Teorema de Bayes

Probabilidades "a posteriori"

$$P(H/F) = \frac{P(F/H)}{P(F)} = \frac{0{,}4 * 0{,}2}{0{,}14}$$

$$P(M/F) = \frac{P(M/H)}{P(F)} = \frac{0{,}6 * 0{,}1}{0{,}14}$$

10. Independencia de sucesos

- Dados $S_1\ y\ S_2$ independientes debe cumplirse

– $\mathbb{CN}$: $P\left({}^{S_1}/_{S_2}\right) = P(S_1)$

– $Y\ como\ P\left({}^{S_1}/_{S_2}\right) = \frac{P(S_1 \cap S_2)}{P(S)}$

- Deducimos:

$$\boxed{S_1\ y\ S_2 \text{ independientes} \leftrightarrow P(S_1 \cap S_2) = P(S_1) * P(S_2)}$$

Textos recomendados

- Martín-Pliego, *Fundamentos de Probabilidad*, Paraninfo, 2010, 3ª Edición

Prácticas recomendadas

- Ejercicios Martín-Pliego
- Ejercicios resueltos en clase
- Prácticas y recursos web (aula virtual)

¿Quieres saber más?

- https://es.wikipedia.org/wiki/Pierre-Simon_Laplace