7. REGRESIÓN Y CORRELACIÓN

Estadística Descriptiva

Dr. Francisco Rabadán Pérez

Índice

■ **Objetivos de cualquier investigador:** Encontrar relaciones entre variables en la forma
$Y = f(x_1, x_2, \dots x_n)$
■ Por dos motivos:
1. *Desconocimiento del investigador (análisis exploratorio)*
2. *Confirmar estructura (análisis confirmatorio)*

9.1. Regresión

- **Objetivos de cualquier investigador:** Encontrar relaciones entre variables en la forma

$$Y = f(x_1, x_2, \dots x_n)$$

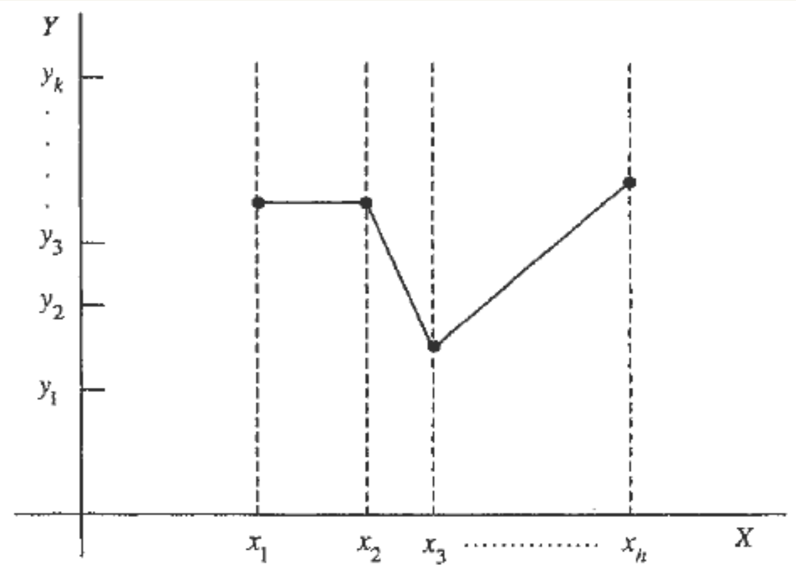
- Por dos motivos:

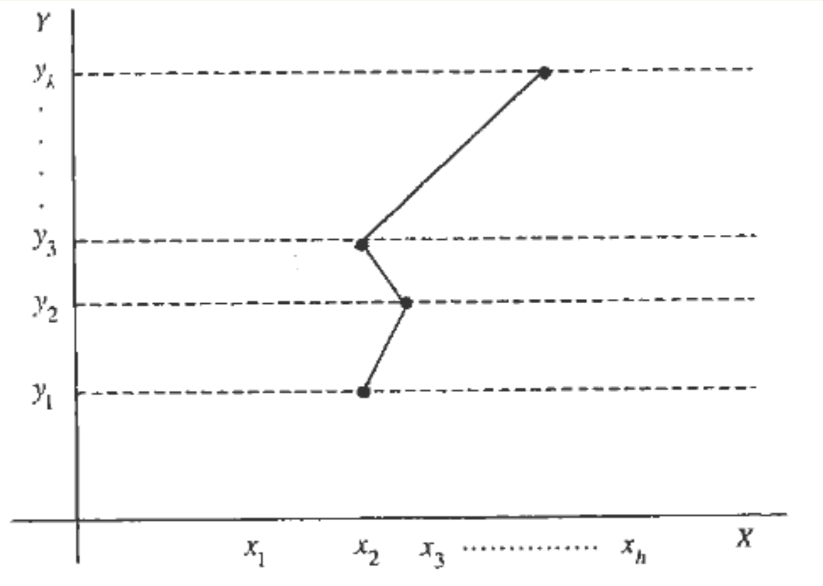
1. *Desconocimiento del investigador (análisis exploratorio)*
2. *Confirmar estructura (análisis confirmatorio)*

Enfoque	Teoría
Grado de dependencia (medida)	Teoría de la Correlación
Estructura de dependencia (ajuste)	Teoría de la Regresión

9.1.1. Regresión Tipo I

Basada en la media condicionada de una variable respecto a otra.





- Se considera que este método nos proporciona la auténtica regresión intrínseca.
- Si tuviéramos infinitos puntos estaríamos ante funciones continuas.
- En la práctica no es así.

Regresión tipo I de y/x

La unión de puntos expresa la media de Y condicionada a que X tome el valor x_i.

$$\left(x_i; \bar{y}/x_i\right)$$

Regresión tipo I de x/y

La unión de puntos expresa la media de X condicionada a que Y tome el valor y_j.

$$\left(\bar{x}/y_i\,; y_j\right)$$

Fte: Martín-Pliego, 2011

9.1.2. Regresión Tipo II

- **Basada en el ajuste por Mínimos Cuadrados Ordinarios la función matemática que más se parezca a la nube de puntos.**

Regresión II de Y sobre X: $$min\left[\sum_i \sum_j \left(y_j-\bar{y}\right)^2 n_{ij}\right]$$

Regresión II de X sobre Y: $$min\left[\sum_i \sum_j (x_i-\bar{x})^2 n_{ij}\right]$$

- El método de regresión tipo II:
  - se considera un método de aproximación a la regresión tipo I.
  - Nos proporciona una función continua.
  - Es el método más generalizado
  - El grado de ajuste será tanto mejor como la curva que describa la nube de puntos.
  - Mientras en la regresión tipo I no seleccionamos ningún tipo de curva, en la regresión tipo II es el primer paso.

(Martín-Pliego, 2011; pág. 239)

9.1.3. Regresión Lineal

- **Basada en el ajuste por Mínimos Cuadrados Ordinarios de una recta a la nube de puntos**

$$min\left[\sum_i \sum_j (y_j - a - bx_i)^2 n_{ij}\right] \Rightarrow \begin{cases} \sum_j y_j n_{.j} = aN + b\sum_i x_i n_{i.} \\ \sum_j x_i y_j n_{.j} = a\sum_i x_i n_{i.} + b\sum_i x_i^2 n_{i.} \end{cases}$$

Si dividimos por N, el sistema se expresa en función de los momentos; $por\ (-a_{10})$ y restando las dos ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} a_{01} = a + b \cdot a_{10} \\ a_{11} = a \cdot a_{10} + b \cdot a_{20} \end{array}\right\} \rightarrow a_{11} - a_{10} \cdot a_{01} = b(a_{20} - a_{10}^2)$$

$Despejando$

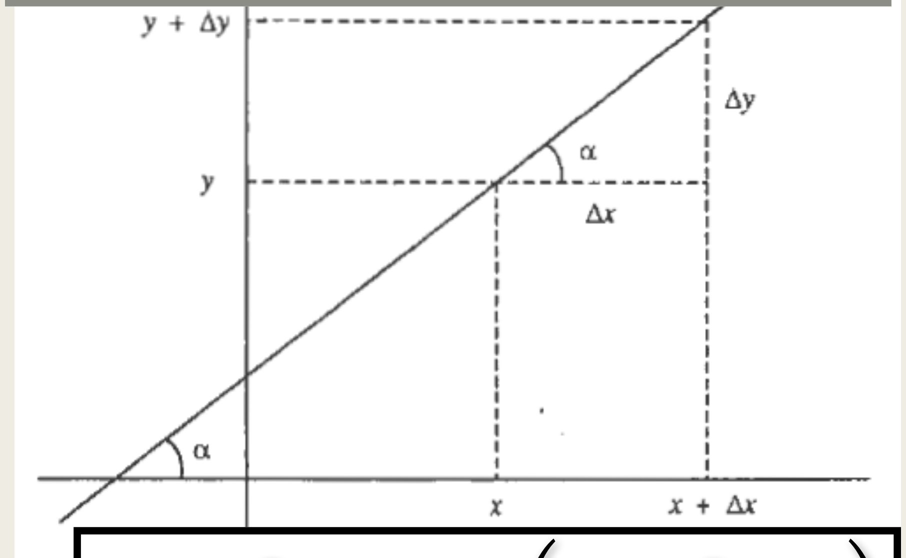
$$b = \frac{a_{11} - a_{10}a_{01}}{a_{20} - a_{10}^2} = \frac{m_{11}}{m_{20}} = \frac{S_{xy}}{S_x^2}$$

$$a = a_{01} - \frac{S_{xy}}{S_x^2} a_{10} = \bar{y} - \frac{S_{xy}}{S_x^2}\bar{x}$$

(Martín-Pliego, 2011; pág. 240,241)

9.1.3. Regresión Lineal

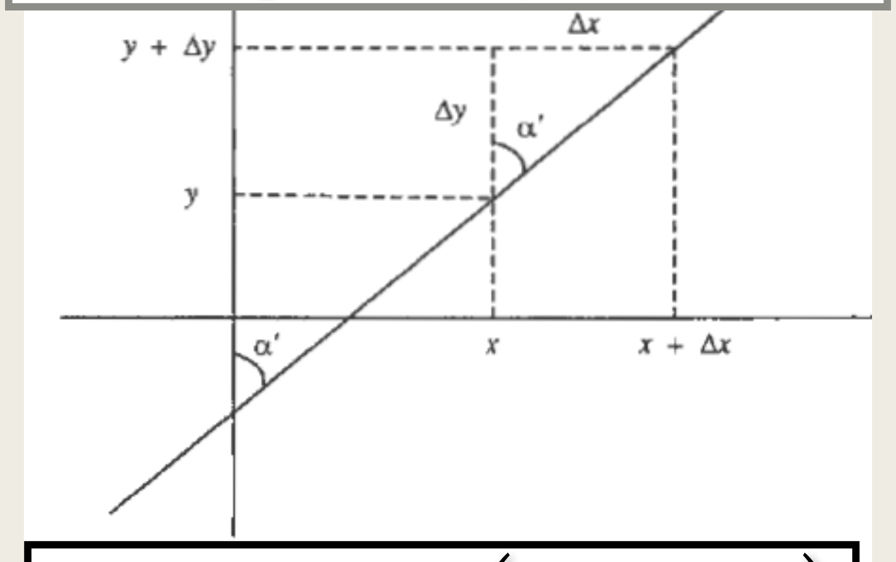
Recta regresión y/x



$$\hat{y}_j = \frac{s_{xy}}{s_x^2} x_i + \left(\bar{y} - \frac{s_{xy}}{s_x^2} \bar{x} \right)$$

$$\hat{y}_j - \bar{y} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} (x_i - \bar{x})$$

Recta regresión x/y



$$\hat{x}_i = \frac{s_{xy}}{s_i^2} y_j + \left(\bar{x} - \frac{s_{xy}}{s_y^2} \bar{y} \right)$$

$$\hat{x}_i - \bar{x} = \frac{s_{xy}}{s_y^2} (y_j - \bar{y})$$

IMPORTANTE

Mas fácil

Ch 9.6

(Martín-Pliego, 2011; pág. 240,241)

9.1.3. Regresión lineal

- **Hay dos rectas de regresión porque**
  - *La recta de regresión de Y sobre X (Y/X) : hace mínimos los errores cuadráticos al estimar Y si contamos con información de X*

$$min(\hat{y} - \bar{y})^2 \; ; X \; conocida$$

  - *La recta de regresión de X sobre Y: hace mínimos los errores al estimar X si contamos con información de Y*

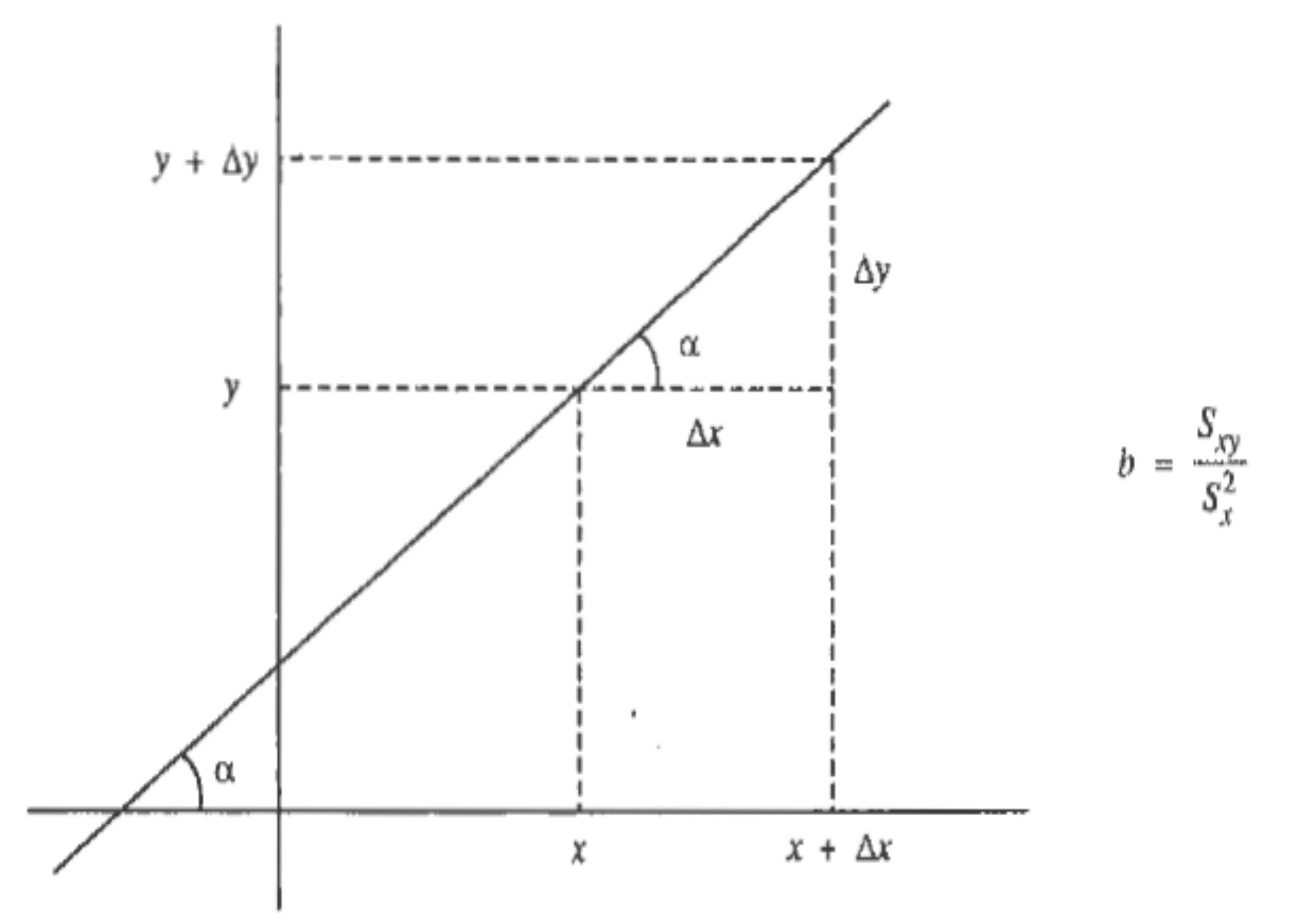
$$min(\hat{x} - \bar{x})^2 \; ; Y \; conocida$$

- **Es importante detectar cual de las dos tiene sentido económico, o si las dos lo tienen.**
- **Ambas rectas interseccionan en $(\bar{x}, \bar{y})$: basta con formar con ellas un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y despejar.**
- **El producto de las pendientes de ambas rectas coincide con el coeficiente de determinación lineal (r^2)** (lo veremos en el 9.2.2)

(Martín-Pliego, 2011; pág. 239)

9.1.4. Coeficientes de las rectas de regresión

- **El coeficiente de la recta de regresión de y/x se interpreta como:**
  - cuanto varía la variable Y ante una unidad de X
  - *Como* $b = \tan\alpha = \frac{\Delta(y)}{\Delta(x)}$ *(ver gráfico 9.1.3), también nos mide la tasa de crecimiento de y para variaciones de X.*
- La recta de regresión de x/y se interpreta de forma similar.



Ch 9.8

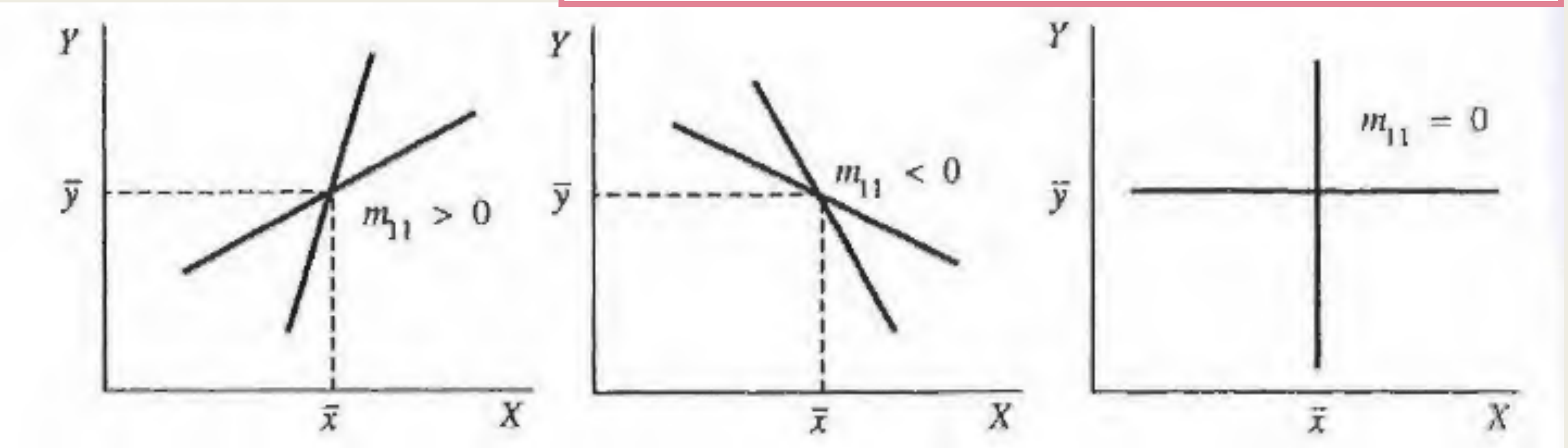
(Martín-Pliego, 2011; pág. 243)

9.1.4. Coeficientes de las rectas de regresión

- Interpretación de la covarianza:
  - *El signo de las pendientes depende de la covarianza*
  - *Dimensión: (ud. de X * ud. De Y)*

$$s_{xy} = \frac{\sum_i \sum_j (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) n_{ij}}{N} = m_{11}$$

S_{xy}=0 implica independencia lineal, pero <u>no tiene porque haber independencia estadística</u>



(Martín-Pliego, 2011; pág. 244)

9.2. Correlación

- **Correlación:** Grado de dependencia entre las variables
- **Varianza Residual:** media de todos los residuos al cuadrado (dependerá de la curva de ajuste)

$$S_{ry}^2 = \sum_i \sum_j \left(y_j - \hat{y}_j\right)^2 \frac{n_{ij}}{N} = \sum_j \left(y_j - \hat{y}_j\right)^2 \frac{n_{.j}}{N}$$

- Cuanto mayor es S_{ry}^2 peor es el ajuste a la curva
- Problema: unidades de medida

9.2.1. Correlación General

- **Coeficiente de Correlación General de Karl Pearson:**

$$R = \sqrt{1 - \frac{S_{ry}^2}{S_y^2}}$$

Grado de dependencia entre las variables; acotado (-1,1) con el signo de la covarianza

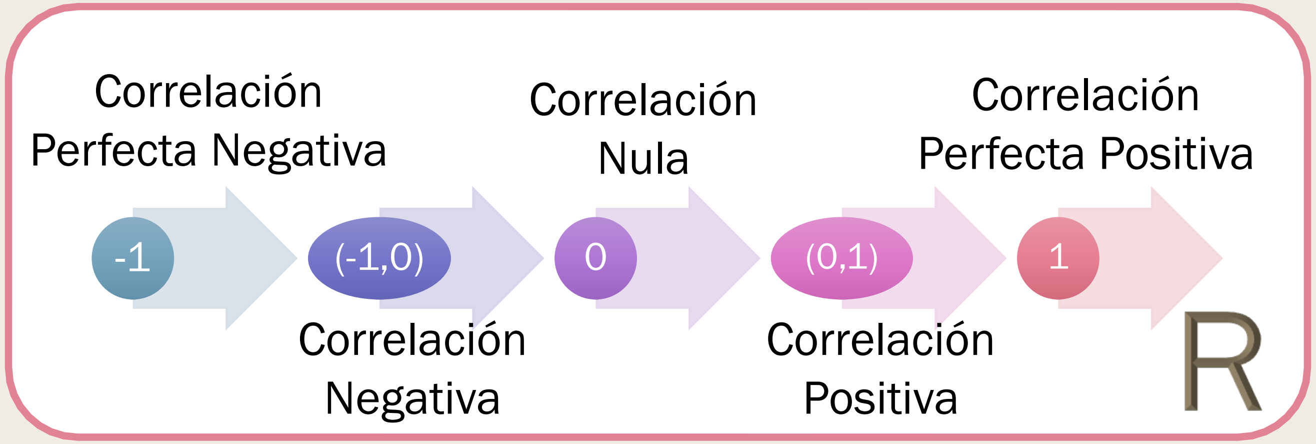
De R nos interesa el signo y los extremos

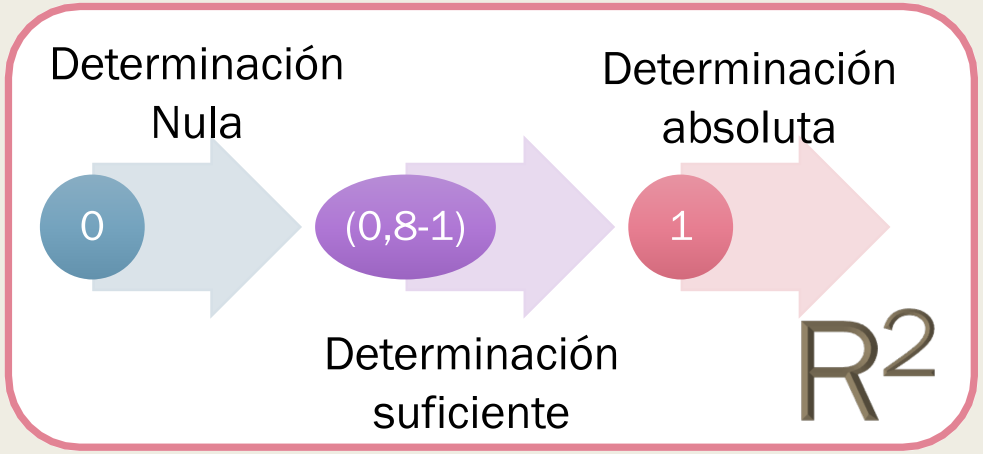
- **Coeficiente de Determinación General de Karl Pearson:**

$$R^2 = 1 - \frac{S_{ry}^2}{S_y^2}$$

Causas comunes entre variables; acotado (0,1) siempre >0

Auténtica Medida de la Bondad del Ajuste





9.2.2. Correlación Lineal

- **Coeficiente de Correlación lineal de Karl Pearson:**

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x S_y}$$

Grado de dependencia entre las variables; acotado (-1,1); el signo depende de la covarianza

De r nos interesa el signo y los extremos

IMPORTANTE

- **Coeficiente de Determinación lineal de Karl Pearson:**

$$r^2 = \frac{S_{xy}^2}{S_x^2 S_y^2}$$

Causas comunes entre variables; acotado (0,1) siempre >0

Auténtica Medida de la Bondad del Ajuste

r

- -1: Correlación lineal Perfecta Negativa
- (-1,0): Correlación lineal Negativa
- 0: Correlación lineal Nula
- (0,1): Correlación lineal Positiva
- 1: Correlación lineal Perfecta Positiva

r^2

- 0: Determinación lineal Nula
- (0,8-1): Determinación lineal suficiente
- 1: Determinación lineal absoluta

9.2.3. Interpretación de r

- **Coeficiente de Correlación lineal de Karl Pearson:** $$r = \frac{S_{xy}}{S_x S_y}$$

r=1

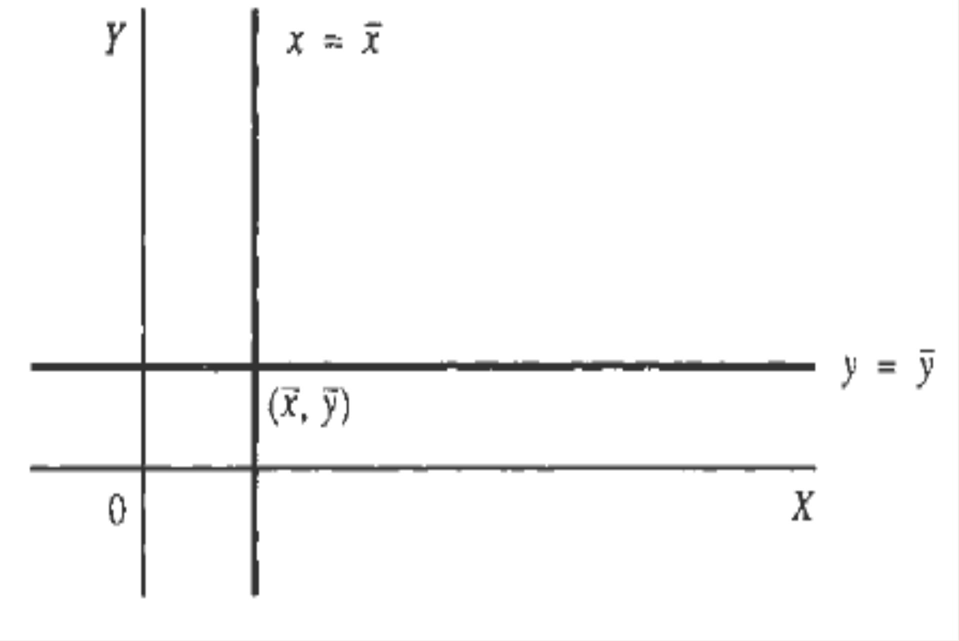
- la varianza residual es cero
- el ajustes es perfecto
- las rectas x/y e y/x coinciden
- A medida que crece X crece Y y viceversa

r=0

- La varianza residual es máxima
- Las rectas X/Y y e Y/X son tangenciales
- Ortogonalidad de variables.

r=-1

- La varianza residual es cero
- El ajuste es perfecto
- las rectas x/y e y/x coinciden
- A medida que crece X decrece Y y viceversa



(Martín-Pliego, 2011; pág. 250)

9.2.4. Correlación Lineal e independencia estadística

- La independencia lineal (r=0) no implica independencia estadística
- El modelo será capaz de explicar r^2 tanto por uno de causas comunes, o de variabilidad total del modelo.
- La varianza relativa no explicada por el modelo será $(1-r^2)$ tanto por uno de causas comunes
- (9.2.5) r es invariante ante transformaciones lineales (Martín-Pliego, 2011; pág. 252)

IMPORTANTE

Textos recomendados

- Martín-Pliego, *Introducción a la Estadística Económica y Empresarial*, Editorial AC, 2011, 3ª Edición

Prácticas recomendadas

- Lectura 9.3 y 9.4 (Martín-Pliego,2011)
- Ejercicios resueltos en clase
- Prácticas y recursos web (aula virtual)