Universidad Rey Juan Carlos

Facultad de Ciencias de la Economía y de la Empresa

Estadística II

Tema 5. Estimación por intervalos

Facultad de Ciencias de la Economía y de la Empresa (FCEE)

Curso 2025–2026 · 4.5 ECTS · 2º cuatrimestre

Francisco Rabadán Pérez · Raquel Ibar Alonso · Ester Muñoz Céspedes

Departamento de Economía Aplicada I e Historia e Instituciones Económicas

Tema 5 · Objetivo

Al terminar este tema podrás:

- explicar **qué es un intervalo de confianza** y cuál es su interpretación correcta;
- distinguir entre intervalos **bilaterales y unilaterales**;
- construir intervalos de confianza en los **casos más habituales**, indicando los supuestos necesarios: para **μ en $N(\mu,\sigma)$** con **σ conocida**; para μ en $N(\mu,\sigma)$ con **σ desconocida**; **para σ^2** (y σ) en $N(\mu,\sigma)$; para una **proporción π** en grandes muestras;
- **elegir el intervalo adecuado** según el parámetro, los supuestos y el tamaño muestral;
- **determinar el tamaño muestral necesario** para alcanzar un error máximo prefijado.

Idea clave

Un intervalo de confianza aporta una estimación no puntual y, además, una medida de precisión.

Cómo leer estas etiquetas

CORE | PLUS | ANEXO

CORE: ideas y procedimientos que sostienen el curso entero y que se practican de forma recurrente.

PLUS: material para profundizar o reforzar intuición; ayuda a consolidar.

ANEXO: material de referencia o consulta.

Universidad Rey Juan Carlos

Facultad de Ciencias de la Economía y de la Empresa

Tema 5 · Esquema

CORE

1. **Introducción e interpretación** de los intervalos de confianza
2. **Métodos** de construcción de intervalos de confianza
3. Intervalos de confianza de **longitud mínima**
4. Intervalos de confianza en **poblaciones normales**
5. Intervalos de confianza en **poblaciones no normales**
6. Determinación del **tamaño muestral**
7. Síntesis y guía de aplicación (**elección** del intervalo)

Breviario

CORE

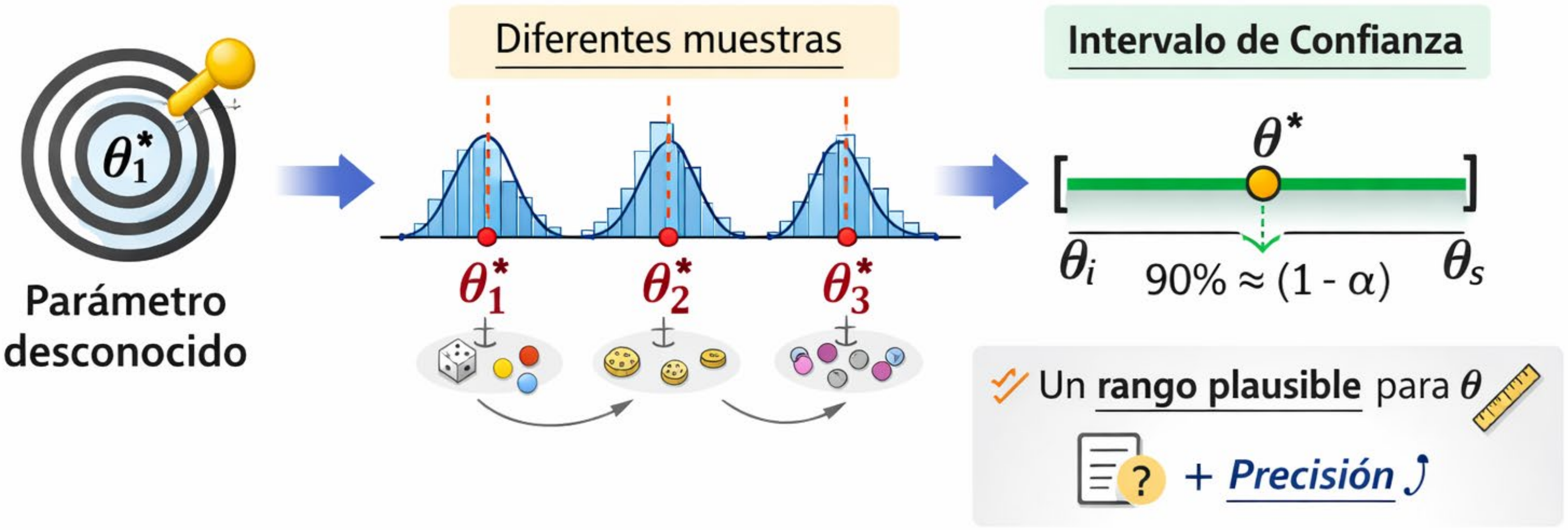
- **Nivel de confianza $\boldsymbol{\gamma}$**: probabilidad (antes de muestrear) de que el intervalo construido contenga al parámetro.
- **Relación**: $\gamma = 1 - \alpha$.
- **Significatividad (α)**: probabilidad de que el intervalo no contenga al verdadero parámetro poblacional (quedarse “fuera” del I.C.).
- **Extremos del I.C.**: $\theta_i(X)$ y $\theta_s(X)$. **Intervalo de confianza**: $[\,\theta_i(X)\,;\,\theta_s(X)\,]$.
- **Amplitud (longitud) del I.C.**: $D = \theta_s(X) - \theta_i(X)$.
- En intervalos bilaterales simétricos, la **semi-amplitud (error máximo)** es $e = D/2$.
- **Intervalo bilateral vs unilateral**: bilateral acota por abajo y por arriba; unilateral es una sola cota: $[\,\theta_i(X), +\infty\,)$ o $(\,-\infty, \theta_s(X)\,]$.
- **Colas iguales** (α/2 y α/2): **convenio estándar** en intervalos bilaterales.
- **Garantía mínima (Chebyshev)**: intervalos que contienen al parámetro poblacional con probabilidad al menos γ, sin suponer normalidad.

¿Por qué no basta con una estimación puntual?

CORE

Idea:

1. Una **estimación puntual resume la información de la muestra en un único número**: $\widehat{\theta}^*$.
2. Si **repitiésemos el muestreo**, obtendríamos otro valor: $\boldsymbol{\widehat{\theta}^*}$ **cambia de una muestra a otra**.
3. **Necesitamos cuantificar la precisión**: construir un intervalo $[\theta_i(X), \theta_s(X)]$ que contenga a θ con una alta probabilidad $(1-\alpha) = \gamma$.



1. Introducción: estimación por intervalos

1. Introducción: estimación por intervalos

CORE

- Partimos de un **parámetro desconocido** θ (p. ej., μ, σ^2, π) y de una muestra aleatoria simple X.
- La estimación puntual $\hat{\theta}$ es un **estadístico**: la estimación $\hat{\theta}^*$cambia de muestra a muestra.
- Queremos un procedimiento que, para cada muestra, produzca un **intervalo aleatorio** $[\theta_i(X), \theta_s(X)]$ que contenga a θ con alta probabilidad.
- Definimos:

$$\gamma = 1 - \alpha$$

Donde $\boldsymbol{\alpha}$ **es la probabilidad de que el intervalo no contenga a** $\boldsymbol{\theta}$ (es decir, "quedarse fuera del I.C.").

- **Definición** del I.C. :

$$P\big(\theta_i(X) \leq \theta \leq \theta_s(X)\big) = \gamma$$

- **Lectura correcta**:
  - **antes de muestrear**, el intervalo tiene **probabilidad** $\boldsymbol{\gamma}$ de contener a θ;
  - **una vez observada** la muestra, obtenemos el **intervalo concreto para esa muestra** $[\theta_i{}^*(X), \theta_s{}^*(X)]$.

1.1. Interpretación correcta de un intervalo de confianza

CORE

- Un intervalo de confianza es un **intervalo aleatorio** $[\theta_i(X), \theta_s(X)]$ construido **a partir de una muestra aleatoria simple** X.
- La afirmación :

$$P\big(\theta_i(X) \leq \theta \leq \theta_s(X)\big) = \gamma$$

se interpreta antes de observar la muestra: si repitiésemos el muestreo muchas veces, una fracción γ de los intervalos construidos contendría al verdadero θ.

- **una vez observada** la muestra, el **intervalo numérico** $[\theta_i{}^*(X), \theta_s{}^*(X)]$ queda fijado, entonces:
  - no tiene sentido hablar de la probabilidad γ de contener al verdadero valor del parámetro,
  - lo correcto es: “este método produce intervalos que contienen a θ con probabilidad γ”.

Error típico a evitar

- Incorrecto **una vez observado el intervalo concreto**: “la probabilidad de que θ esté en $[\theta_i(X), \theta_s(X)]$ es γ”.

1.2 Intervalos bilaterales y unilaterales

CORE

α es la probabilidad de que el intervalo no contenga a θ.

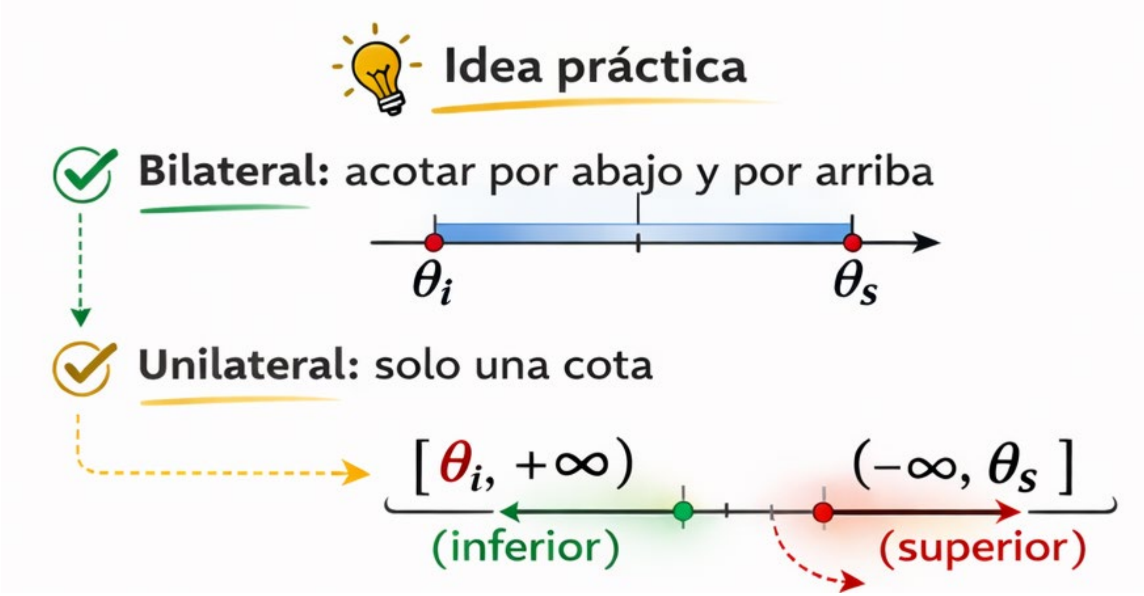
- Distinguimos:

1) **Intervalo bilateral** (dos colas)

- *Idea práctica*: queremos acotar θ "por abajo y por arriba".
- En el caso bilateral estándar (simétrico): $\alpha/2$ en cada cola.

2) **Intervalo unilateral** (una cola)

- *Idea práctica*: solo nos interesa garantizar una cota (por ejemplo, "al menos" o "como mucho").
  - **Cota inferior**: $[\theta_i(X), +\infty)$
  - **Cota superior**: $(-\infty, \theta_s(X)]$



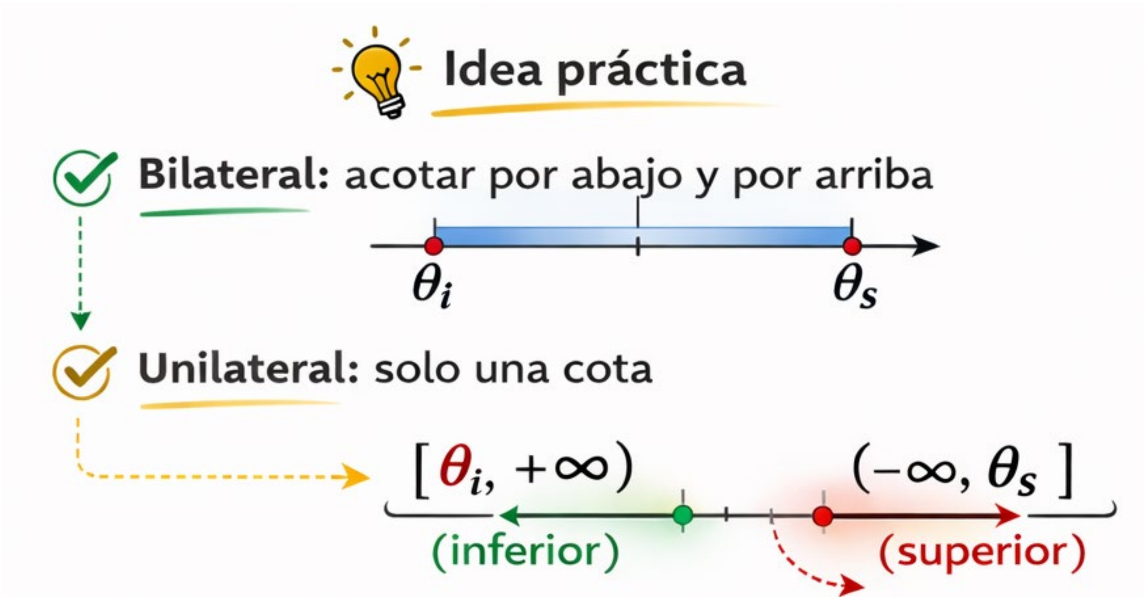
1.2 ¿Cuándo usar un I.C. bilateral o unilateral?

CORE

1) **Intervalo bilateral** (dos colas) si queremos acotar θ "por abajo y por arriba".
   Ejemplos típicos:
   - estimar un coste medio μ con margen de error,
   - estimar una proporción π (tasa de paro, tasa de impago),
   - estimar la variabilidad σ^2.

- **Intervalo unilateral** (una cola) si solo interesa una cota
  - **Cota inferior**: $[\theta_i(X), +\infty]$: "garantizar que θ es al menos…"
  - **Cota superior**: $[-\infty, \theta_s(X)]$: "asegurar que θ no supera…"

- **Regla práctica**:
  - bilateral = acotación por ambos lados,
  - unilateral = "cumplir un requisito" (mínimo o máximo).



Resumen de la Sección 1 (ideas clave)

CORE

1. **Verdadero / Falso**: “La probabilidad de que θ esté dentro de $[\theta_i(X), \theta_s(X)]$ es γ”
2. **¿Qué representa α?**
   a) La probabilidad total de que el intervalo no contenga a θ
   b) La probabilidad de que θ esté dentro del intervalo observado
   c) La longitud media del intervalo
   d) La varianza del estimador $\hat{\theta}$
3. **¿Cuándo es más adecuado un intervalo unilateral (una cola)?**
   a) Estimar un salario medio con “margen” por arriba y por abajo
   b) Estimar la dispersión σ^2 por arriba y por abajo
   c) Garantizar que la tasa de defectos es como mucho un 2%
   d) Dar un rango plausible para la tasa de paro
4. **En un intervalo bilateral estándar, ¿cómo se reparte la probabilidad fuera del intervalo?**
   a) α en una sola cola
   b) $\alpha/2$ en cada cola
   c) $\gamma/2$ en cada cola
   d) Depende del tamaño muestral, no se puede fijar

Resumen de la Sección 1 (ideas clave)

CORE

1. **Verdadero / Falso**: "La probabilidad de que θ esté dentro de $[\theta_i(X), \theta_s(X)]$ es γ" ❌
2. **¿Qué representa α?**
   a) La probabilidad total de que el intervalo no contenga a θ ✅
   b) La probabilidad de que θ esté dentro del intervalo observado
   c) La longitud media del intervalo
   d) La varianza del estimador $\hat{\theta}$
3. **¿Cuándo es más adecuado un intervalo unilateral (una cola)?**
   a) Estimar un salario medio con "margen" por arriba y por abajo
   b) Estimar la dispersión σ^2 por arriba y por abajo
   c) Garantizar que la tasa de defectos es como mucho un 2% ✅
   d) Dar un rango plausible para la tasa de paro
4. **En un intervalo bilateral estándar, ¿cómo se reparte la probabilidad fuera del intervalo?**
   a) α en una sola cola
   b) $\alpha/2$ en cada cola ✅
   c) $\gamma/2$ en cada cola
   d) Depende del tamaño muestral, no se puede fijar

2. Métodos de construcción de intervalos de confianza

2.1 Métodos de construcción de intervalos de confianza

Objetivo: Construir un **intervalo aleatorio** $[\theta_i(X), \theta_s(X)]$ con nivel $\gamma = 1 - \alpha$:

$$P\big(\theta_i(X) \leq \theta \leq \theta_s(X)\big) = \gamma$$

Dos enfoques (mismo objetivo, distinto punto de partida):

1. **Método de la cantidad pivotal**
    - se construye un **estadístico $T(X;\theta)$** tal que su **distribución no depende de θ**;
    - Se eligen cuantiles K_1 y K_2 (tablas) y se plantea

      $$P(K_1 \leq T(X;\theta) \leq K_2) = 1 - \alpha$$
    - Se despeja $\theta \rightarrow P(\theta_i(X) \leq \theta \leq \theta_s(X)) = 1 - \alpha \rightarrow [\theta_i(X); \theta_s(X)]$

2. **Método general**.
    - se parte de la **distribución muestral del estimador $\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{X})$** que está parametrizado por $\boldsymbol{\theta}$.
    - se buscan **límites** $K_1(\alpha;\theta)$, $K_2(\alpha;\theta)$ para $\hat{\theta}$ con probabilidad γ.
    - Se invierte el evento para acotar $\theta \rightarrow [\theta_i(X); \theta_s(X)]$

- **Idea operativa común**: "estandarizar → usar tablas (α o $\alpha/2$) → despejar/invertir"

2.2 Método de la cantidad pivotal

CORE

- **Buscamos una cantidad pivotal $T(X;\theta)$** cuya distribución **no depende de θ**.
- Elegimos **valores críticos** K_1, K_2 (a partir de α; y, si aplica, de g.l.).
- **Planteamos**:

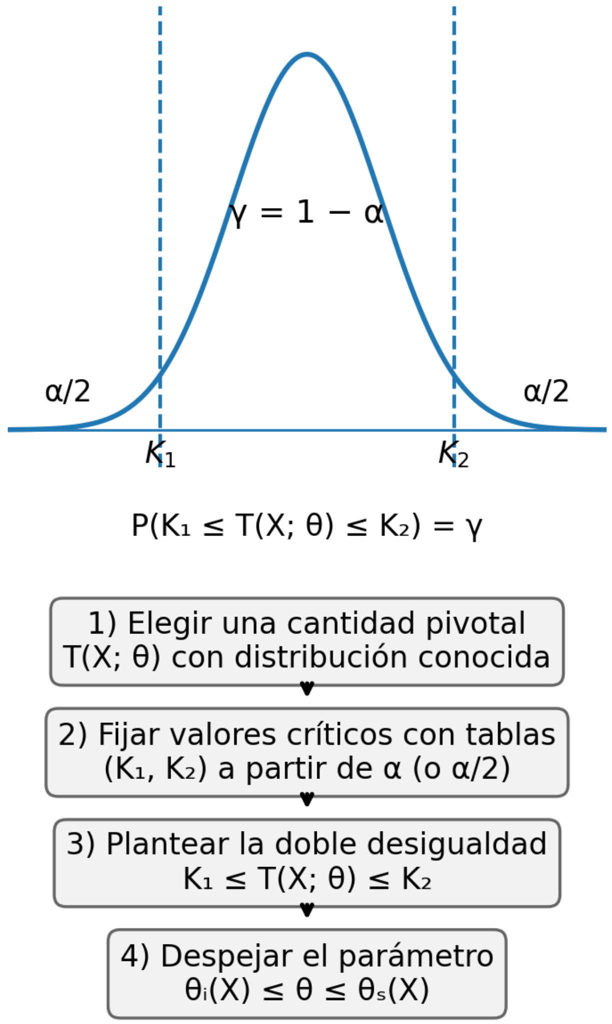
$$P(K_1 \leq T(X;\theta) \leq K_2) = \gamma \;\; ; \;\; \gamma = 1 - \alpha$$

- Como $T(X;\theta)$ depende de θ, **se despeja θ** en la doble desigualdad para obtener

$$P\big(\theta_i(X) \leq \theta \leq \theta_s(X)\big) = 1 - \alpha$$

- **Idea clave**: "pivote → cuantiles tabulados → despejar θ".

Método de la cantidad pivotal (esquema)



2.3 Método general de construcción

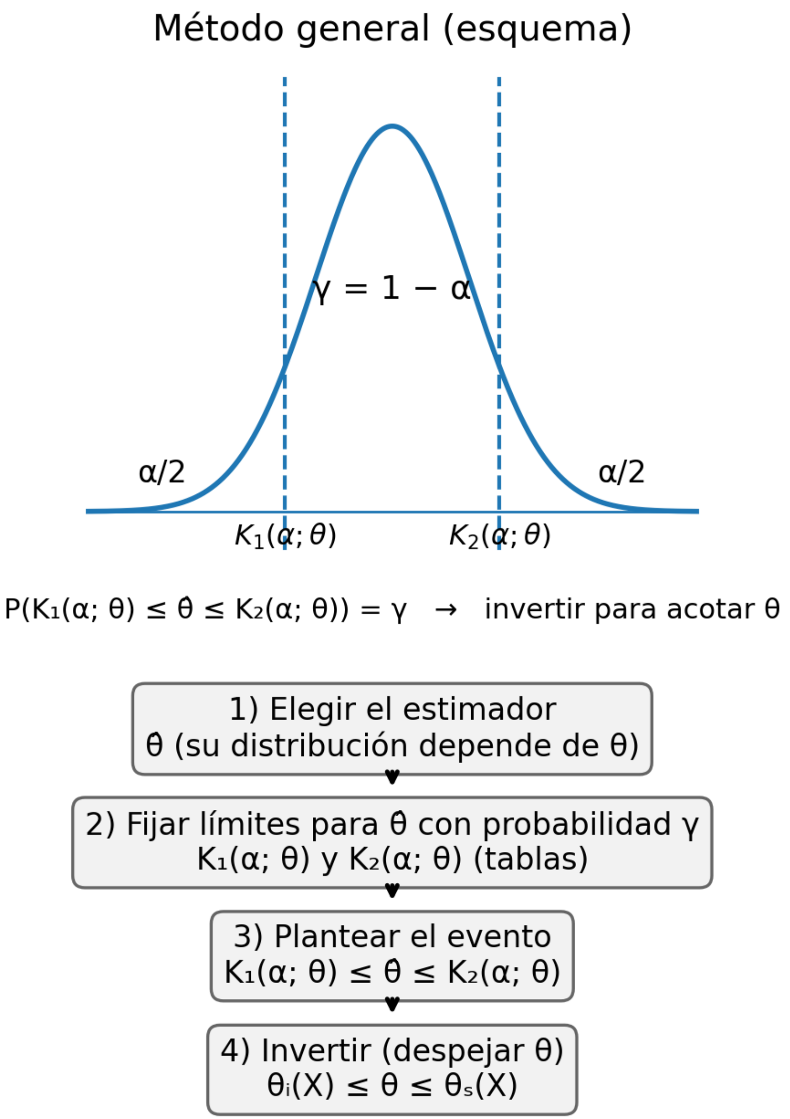
- Partimos del **estimador** $\hat{\theta}$ y de **su distribución muestral**, que **suele depender** del parámetro $\boldsymbol{\theta}$.
- Buscamos **dos funciones** $K_1(\alpha;\theta), K_2(\alpha;\theta)$ tales que:

$$P\left[K_1(\alpha;\theta) \le \hat{\theta} \le K_2(\alpha;\theta)\right] = \gamma \quad (\gamma = 1 - \alpha)$$

- Como los límites dependen de θ, **se invierte** el evento (se despeja θ) para obtener:

$$\theta_i(X) \le \theta \le \theta_s(X)$$

- **Idea clave**: "distribución de $\hat{\theta}$ → acotar $\hat{\theta}$ con probabilidad γ → invertir para acotar θ".



2.4 Nota importante: valores críticos y colas

- En ambos métodos (pivotal y general) aparecen valores críticos K_1 y K_2 fijados por α.
- En un intervalo de confianza, $\boldsymbol{\alpha}$ mide **la probabilidad de que el intervalo no contenga a $\boldsymbol{\theta}$**.

- Caso **bilateral (dos colas, estándar)**:
  - α se reparte a ambos lados de los extremos del intervalo.
  - Si la distribución es simétrica $\alpha/2$ a cada lado,

- Caso **unilateral**:
  - $\boldsymbol{\alpha}$ se concentra en **una sola cola**,
  - se busca **un único valor crítico**.

2.5 Mini–test (Métodos de construcción)

CORE

1. **Una cantidad pivotal T(X;θ) se caracteriza porque:**
   a) depende de θ y su distribución también depende de θ
   b) depende de θ pero su distribución no depende de θ
   c) no depende de θ y su distribución depende de θ
   d) no depende de θ y su distribución no depende de θ

2. **En el método general, el punto de partida es:**
   a) una tabla de cuantiles sin definir un estimador
   b) una función de verosimilitud L(θ)
   c) la distribución muestral del estimador $\hat{\theta}$
   d) el reparto α/2 sin más información

3. **En un I.C. bilateral estándar, los valores críticos se eligen dejando**
   a) α en cada cola
   b) α/2 en cada cola
   c) $\gamma/2$ en cada cola
   d) γ en una cola

4. **¿Qué significa "invertir" en el método general?**
   a) Cambiar K_1 por K_2
   b) Sustituir θ por $\hat{\theta}^*$
   c) Pasar de una desigualdad sobre $\hat{\theta}$ a una desigualdad sobre θ
   d) Cambiar bilateral por unilateral

2.5 Mini–test (Métodos de construcción)

CORE

1. **Una cantidad pivotal T(X;θ) se caracteriza porque:**
   a) depende de θ y su distribución también depende de θ
   b) depende de θ pero su distribución no depende de θ ✅
   c) no depende de θ y su distribución depende de θ
   d) no depende de θ y su distribución no depende de θ

2. **En el método general, el punto de partida es:**
   a) una tabla de cuantiles sin definir un estimador
   b) una función de verosimilitud L(θ)
   c) la distribución muestral del estimador $\hat{\theta}$ ✅
   d) el reparto α/2 sin más información

3. **En un I.C. bilateral estándar, los valores críticos se eligen dejando**
   a) α en cada cola
   b) α/2 en cada cola ✅
   c) $\gamma/2$ en cada cola
   d) γ en una cola

4. **¿Qué significa "invertir" en el método general?**
   a) Cambiar K_1 por K_2
   b) Sustituir θ por $\hat{\theta}^*$
   c) Pasar de una desigualdad sobre $\hat{\theta}$ a una desigualdad sobre θ ✅
   d) Cambiar bilateral por unilateral

3. Intervalos de confianza de longitud mínima

CORE

3. Intervalos de confianza de longitud mínima

- **Para un mismo nivel de confianza** γ=1−α **puede haber más de un intervalo de confianza posible**.
  - En un intervalo **bilateral** (dos colas) suele haber una **familia de intervalos posibles**, **según cómo se reparta α** en los extremos.
  - En un intervalo **unilateral** (una cola), una vez fijado el lado (inferior/superior), la construcción habitual queda mucho más determinada (**depende de un único cuantil**).

- **Entre todos los I.C. posibles** , elegimos **el más preciso**, es decir, el que **tenga menor amplitud**.

- Definimos la **amplitud** (longitud) **del intervalo**:

$$D = \theta_s(X) - \theta_i(X)$$

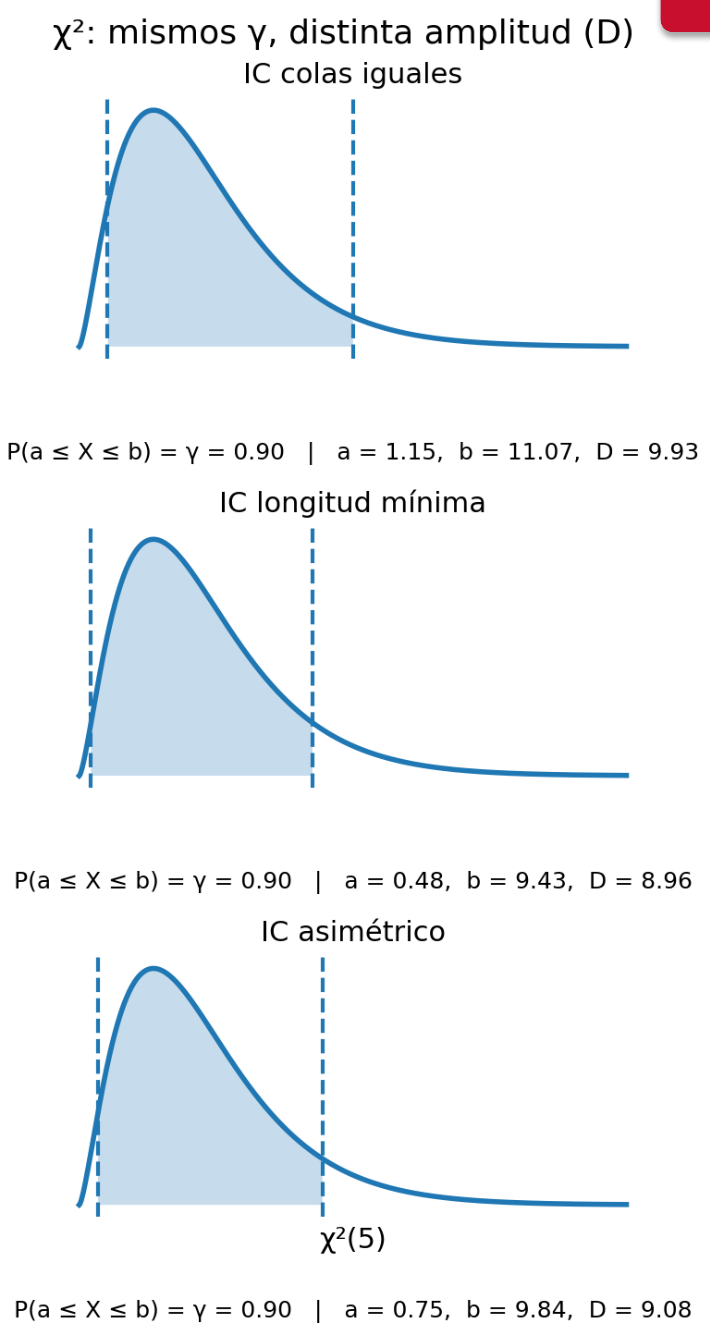
- **Objetivo** de esta sección:
  - **entender** por qué el intervalo no es único,
  - y justificar el **criterio de longitud mínima** (o el convenio bilateral estándar $\alpha/2$ y $\alpha/2$).

3.1 ¿Por qué no es único un I.C. bilateral?

- En un **I.C. bilateral** dejamos fuera del intervalo una probabilidad α (significatividad), **repartida entre ambos extremos**.
- Ese reparto **no tiene por qué ser simétrico**: podemos colocar más probabilidad en un lado y menos en el otro.
- Por eso **pueden existir muchos intervalos** $[\theta_i(X), \theta_s(X)]$ con el mismo γ=1−α, pero con distinta amplitud.
- Definimos la **amplitud** (longitud) **del intervalo**:

$$D = \theta_s(X) - \theta_i(X)$$

- **Objetivo** de esta sección:
  - **entender** por qué el intervalo no es único,
  - y justificar el **criterio de longitud mínima** o **el convenio bilateral estándar** $\alpha/2$ y $\alpha/2$.



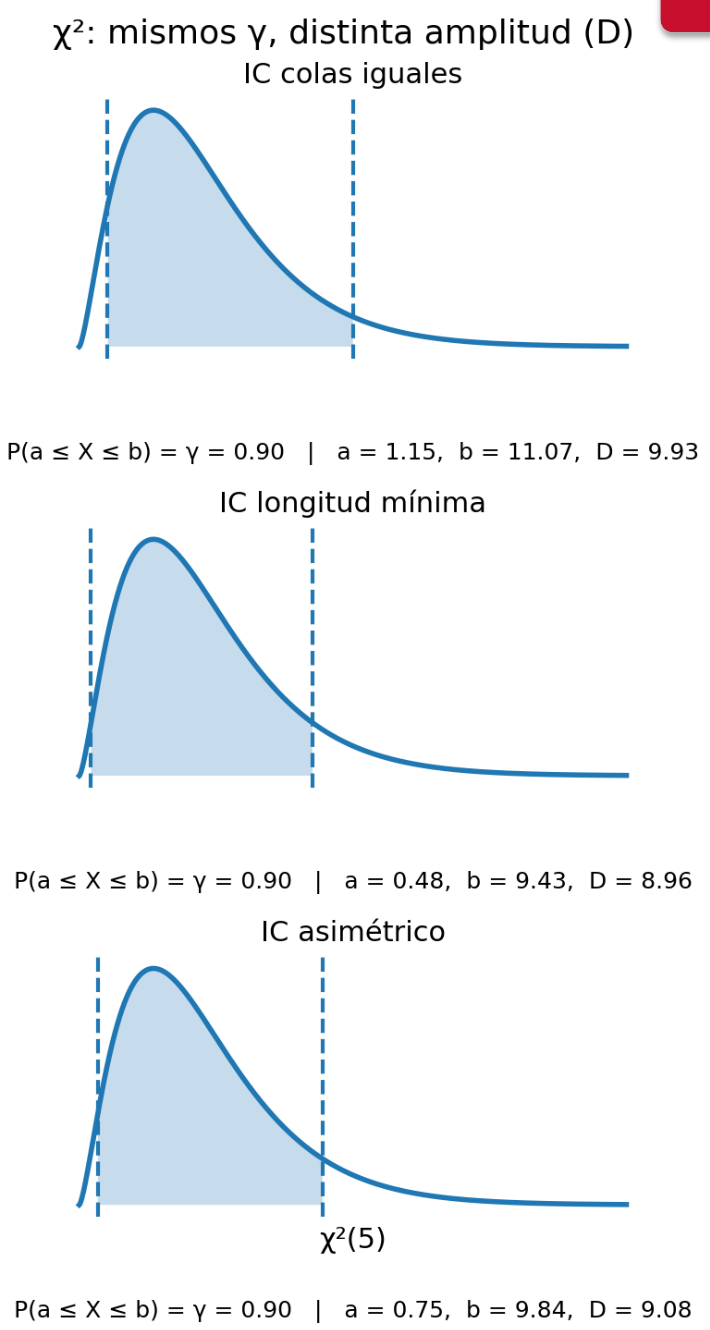
3.2 Criterio de longitud mínima

- **Entre los intervalos bilaterales** con el mismo nivel $\boldsymbol{\gamma}$, elegimos el que tenga **menor amplitud**:

$$D = \theta_s(X) - \theta_i(X)$$

- **Idea**: el "mejor" intervalo es el que, manteniendo el mismo α, tiene **menor amplitud**.

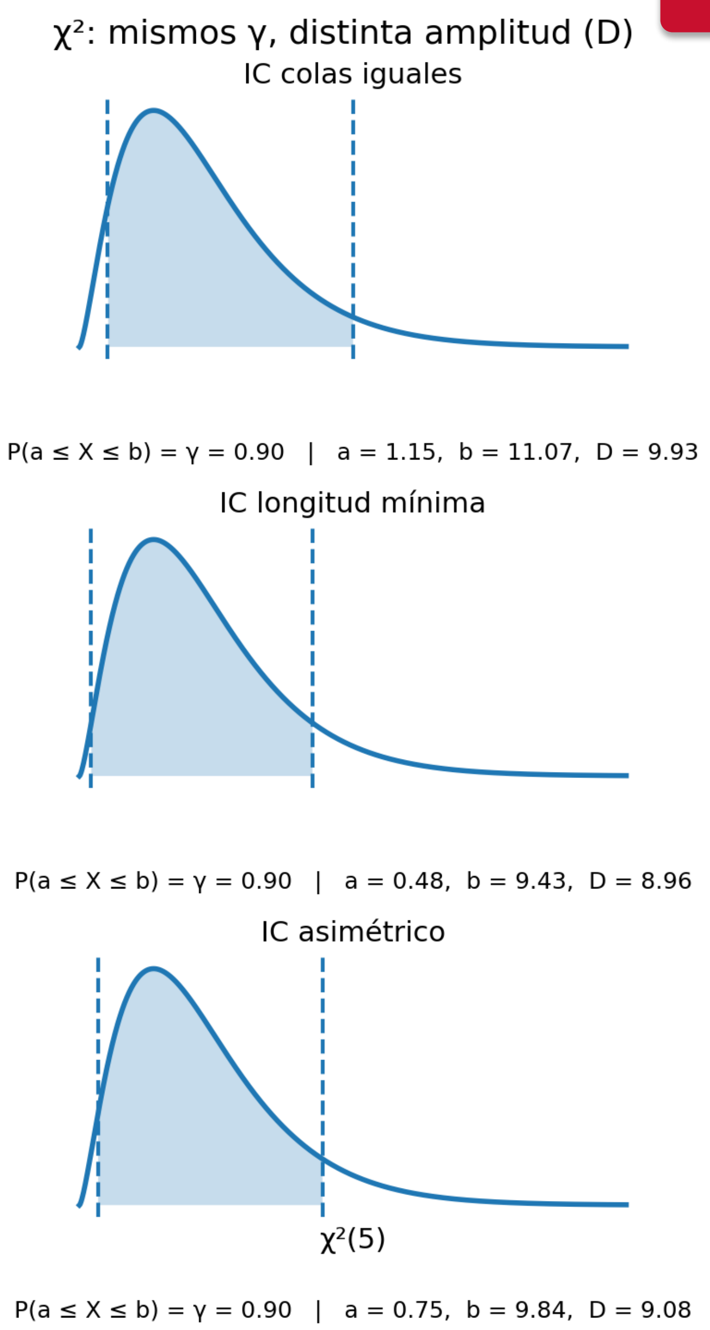
- **Nota práctica:**
  - En distribuciones **simétricas** (p. ej., Normal), el intervalo **"colas iguales" suele coincidir** con el de longitud mínima.
  - En distribuciones **asimétricas** (p. ej., χ^2), **puede diferir**.



3.3 Convenio: intervalo bilateral estándar

CORE

- **En la práctica**, cuando se pide un intervalo bilateral y no se especifica nada más, **se usa el intervalo de colas iguales**.
- **Significa** que la significatividad α **se reparte de forma simétrica**: $\alpha/2$ a cada lado.
- **Ventajas:**
    - es un **criterio simple y único** (evita arbitrariedad),
    - es **el más usado** en tablas y manuales,
    - en distribuciones **simétricas** coincide con el **intervalo central** (colas iguales).
- **Importante**: en distribuciones asimétricas (p. ej., $\chi 2$), este convenio no tiene por qué dar el intervalo de menor amplitud.



3. Mini–test (longitud mínima)

CORE

1. **En un I.C. bilateral, ¿por qué puede no ser único el intervalo para un mismo γ?**
   a) Porque γ cambia con la muestra
   b) Porque el reparto de la probabilidad α entre los extremos puede variar
   c) Porque θ es aleatorio
   d) Porque siempre hay que usar α/2

2. **La amplitud del intervalo se define como:**
   a) $D = \theta_i(X) + \theta_s(X)$
   b) $D = \theta_s(X) - \theta_i(X)$
   c) $D = \gamma - \alpha$
   d) $D = \hat{\theta}^* - \theta$

3. ***En una distribución simétrica, el intervalo de colas iguales coincide con :***
   a) el más amplio
   b) el intervalo central, y a menudo el menos amplio
   c) siempre asimétrico
   d) solo unilateral

4. **En una distribución asimétrica (p. ej., χ^2), el intervalo de colas iguales:**
   a) siempre es el de longitud mínima
   b) nunca es válido
   c) puede no coincidir con el de longitud mínima
   d) obliga a usar un intervalo unilateral

3. Mini–test (longitud mínima)

CORE

1. **En un I.C. bilateral, ¿por qué puede no ser único el intervalo para un mismo γ?**
   a) Porque γ cambia con la muestra
   b) Porque el reparto de la probabilidad α entre los extremos puede variar ✅
   c) Porque θ es aleatorio
   d) Porque siempre hay que usar α/2

2. **La amplitud del intervalo se define como:**
   a) $D = \theta_i(X) + \theta_s(X)$
   b) $D = \theta_s(X) - \theta_i(X)$ ✅
   c) $D = \gamma - \alpha$
   d) $D = \hat{\theta}^* - \theta$

3. ***En una distribución simétrica, el intervalo de colas iguales coincide con :***
   a) el más amplio
   b) el intervalo central, y a menudo el menos amplio ✅
   c) siempre asimétrico
   d) solo unilateral

4. **En una distribución asimétrica (p. ej., χ^2), el intervalo de colas iguales:**
   a) siempre es el de longitud mínima
   b) nunca es válido
   c) puede no coincidir con el de longitud mínima ✅
   d) obliga a usar un intervalo unilateral

4. Intervalos de confianza en poblaciones normales

CORE

4.1 Caso $N(\mu, \sigma)$: σ^2 conocida (I.C. para μ)

- **Supuesto**: $x_1, \dots x_n$ es m.a.s. de una población $N(\mu, \sigma)$ y σ^2 conocida.
- **Estimador**: $\hat{\mu} = \bar{x}$

1. Pivote:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

2. **Intervalo teórico** (colas iguales)

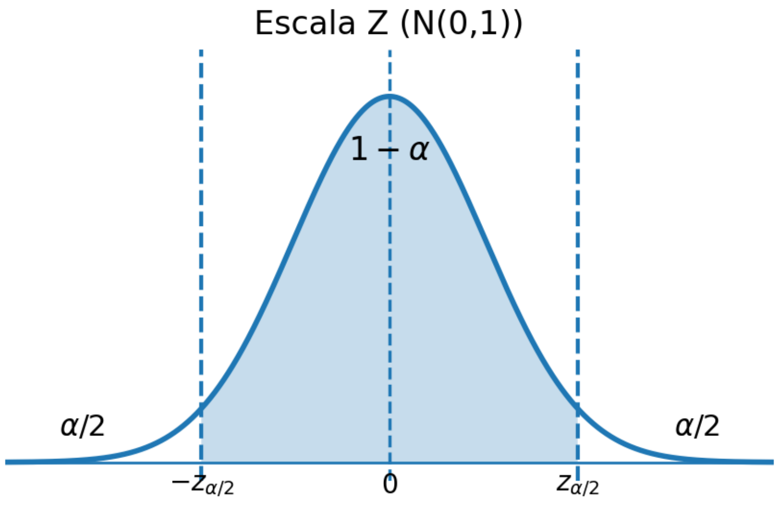
$$P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

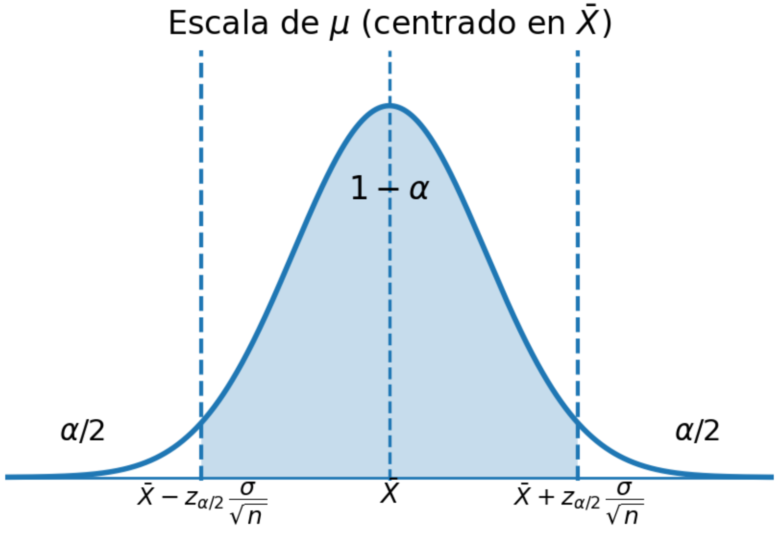
$$P\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

3. Resultado $IC_{1-\alpha}(\mu)$

$$\mu \in \left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right); \ \gamma = 1 - \alpha$$

Interpretación: $\bar{x}$ es el **centro** y el $z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ es la **semi amplitud** del I.C.





4.1.1 Ejercicio: I.C. para μ con σ conocida en $N(\mu, \sigma)$

CORE

Enunciado: Una consultora analiza el gasto mensual medio (en €) en transporte de los estudiantes de un campus. Estudios previos indican que el gasto puede modelizarse como $N(\mu, \sigma)$ y que la desviación típica poblacional es conocida, $\sigma = 18$ €. Se toma una m.a.s. de tamaño n=36 y se obtiene $\bar{x} = 72$ €.

1. **Construye el intervalo de confianza bilateral del 95% para μ.**

$$\alpha = 0{,}05, \qquad z_{\alpha/2} = z_{0{,}025} \approx 1{,}96, \qquad semiamplitud = 1{,}96 \cdot \frac{18}{\sqrt{36}} = 1{,}96 * 3 = 5{,}88$$

(desarrollar el cálculo del intervalo)

$$\boldsymbol{IC_{95\%}(\mu) = [72 - 5,88\,;72 + 5,88] = [66,12\,;77,88\,]}€$$

2. **Interpreta el resultado en una frase (en términos del método, no del parámetro aleatorio).**

   "**Si repitiésemos el muestreo** y construyésemos el IC del 95% del mismo modo, **aproximadamente el 95% de los intervalos contendrían a μ.**"

3. **(Mini) ¿Qué ocurriría con la semi-amplitud si el tamaño muestral se duplicara?**

$$semiamplitud\ nueva = \frac{5{,}88}{\sqrt{2}} \approx 4{,}16€$$

4.2 Caso $N(\mu,\sigma)$: σ^2 desconocida (I.C. para μ)

CORE

- **Supuesto**: $x_1, \ldots x_n$ es m.a.s. de una población $N(\mu,\sigma)$ y σ^2 desconocida.
- **Estimador**: $\hat{\mu} = \bar{x}$
- **Estadístico muestral**: S_1 (cuasidesviación típica)

1. Pivote:

$$T = \frac{\bar{x}-\mu}{S_1/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

2. **Intervalo teórico** (colas iguales)

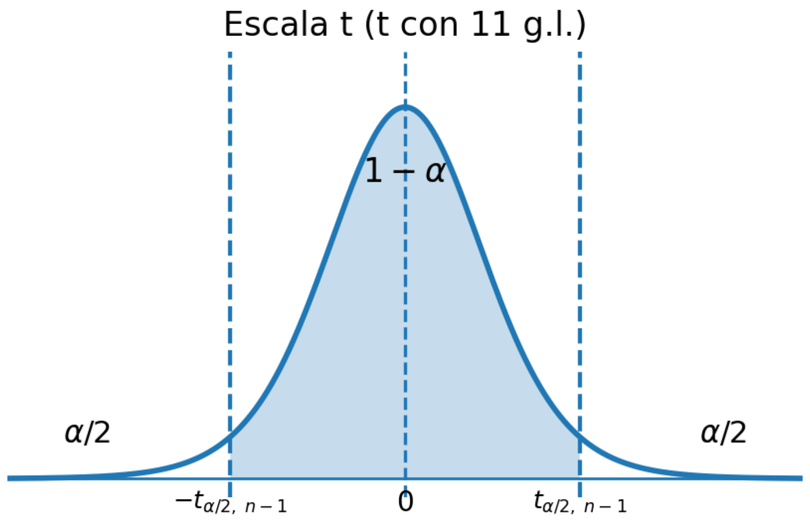
$$P\left(-t_{\alpha/2,n-1} \leq \frac{\bar{x}-\mu}{S_1/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha/2,n-1}\right) = 1-\alpha$$

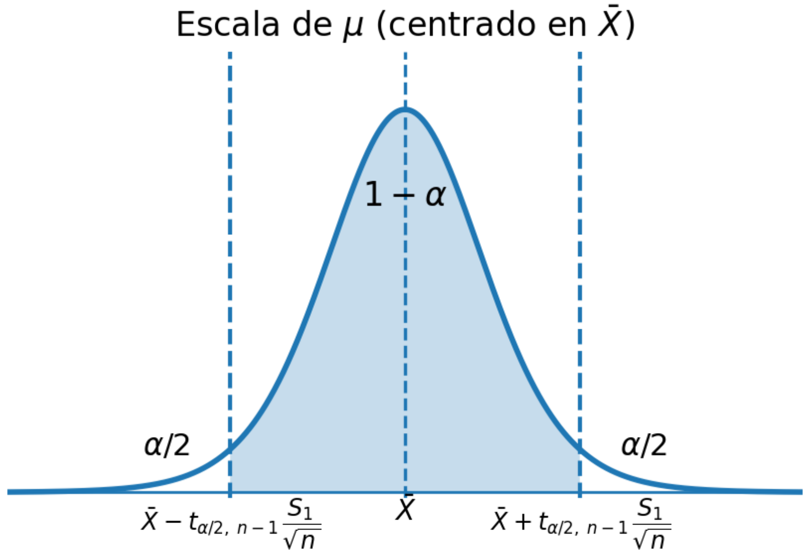
$$P\left(\bar{x} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{S_1}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{S_1}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

3. Resultado $IC_{1-\alpha}(\mu)$

$$\mu \in \left(\bar{x} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{S_1}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{S_1}{\sqrt{n}}\right); \gamma = 1-\alpha$$

Interpretación: $\bar{x}$ es el **centro** y $t_{\alpha/2,n-1}\frac{S_1}{\sqrt{n}}$ es la **semi amplitud** del I.C.





4.2.1 Ejercicio: I.C. para μ con σ desconocida en $N(\mu,\sigma)$

CORE

Enunciado: Una empresa estudia el tiempo medio (en minutos) que sus clientes esperan en caja. Se asume $N(\mu,\sigma)$ con σ desconocida.

Muestra: $n = \mathbf{12}, \bar{x} = \mathbf{8,4}, S_1 = \mathbf{2,5}$ **.**

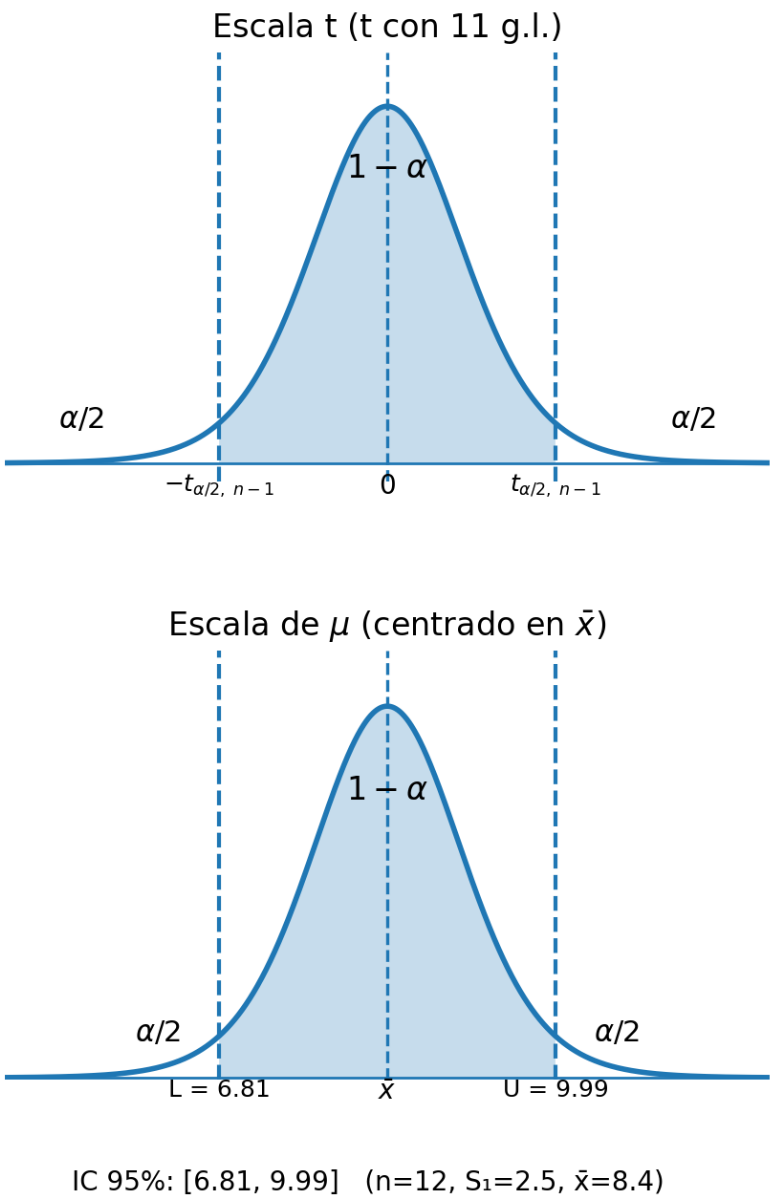
1. Construye el intervalo de confianza bilateral del 95% para μ.

$$\alpha = 0{,}05, \qquad g.l. = n-1 = 11 \qquad t_{\alpha/2,n-1} = t_{0{,}025\,;\,11} \approx 2{,}201,$$

$$semiamplitud = 2{,}201 \cdot \frac{2{,}5}{\sqrt{12}} = 2{,}201 * 0{,}7217 \approx 1{,}59$$

(desarrollar el cálculo del intervalo)

$$\boldsymbol{IC_{95\%}(\mu) = [8,4 - 1,59\,; 8,4 + 1,59] = [6,81; 9,99\,]\; minutos}$$



Test rápido (Z vs t)

CORE

1. **¿Cuándo usamos $z_{\alpha/2}$ en un I.C. para μ?**
   a) Siempre que n ≥ 30
   b) Cuando σ es conocida y $\xi \sim N(\mu, \sigma)$
   c) Cuando σ es desconocida
   d) Solo en intervalos unilaterales
2. **Si σ es desconocida y asumimos N(μ,σ), el pivote usa:**
   a) Normal estándar
   b) χ^2
   c) t de Student con n−1 g.l.
   d) F de Snedecor
3. **En el caso t, el "n−1" aparece porque:**
   a) el estimador $\bar{x}$ tiene n−1 valores
   b) se estima σ con S_1, que usa n−1 g.l.
   c) la normal tiene n−1 parámetros
   d) es una convención sin motivo
4. **Al aumentar n, manteniendo el resto, el I.C. para μ:**
   a) tiene mayor amplitud
   b) no cambia
   c) tiene menor amplitud
   d) se vuelve unilateral

CORE

Test rápido (Z vs t)

1. **¿Cuándo usamos $z_{\alpha/2}$ en un I.C. para μ?**
   a) Siempre que $n \geq 30$
   b) Cuando σ es conocida y $\xi \sim N(\mu, \sigma)$ ✅
   c) Cuando σ es desconocida
   d) Solo en intervalos unilaterales
2. **Si σ es desconocida y asumimos N(μ,σ), el pivote usa:**
   a) Normal estándar
   b) χ^2
   c) t de Student con n−1 g.l. ✅
   d) F de Snedecor
3. **En el caso t, el "n−1" aparece porque:**
   a) el estimador $\bar{x}$ tiene n−1 valores
   b) se estima σ con S_1, que usa n−1 g.l. ✅
   c) la normal tiene n−1 parámetros
   d) es una convención sin motivo
4. **Al aumentar n, manteniendo el resto, el I.C. para μ:**
   a) tiene mayor amplitud
   b) no cambia
   c) tiene menor amplitud ✅
   d) se vuelve unilateral

CORE

4.3 Caso $N(\mu,\sigma)$: I.C. para σ^2 (y para σ)

- **Supuesto**: $x_1, \ldots x_n$ es m.a.s. de una población $N(\mu,\sigma)$.
- **Estimador**: $\widehat{\sigma^2} = S_1^2$

1. **Pivote (Fisher–Cochran):** $\dfrac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

2. **Intervalo teórico** (colas iguales)

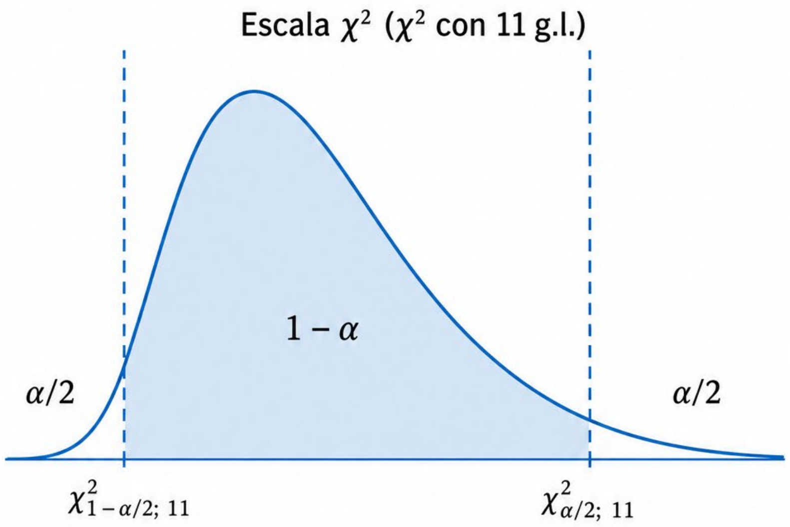
$$P\left(\chi^2_{1-\alpha/2;\ n-1} \le \frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{\alpha/2;\ n-1}\right) = 1-\alpha$$

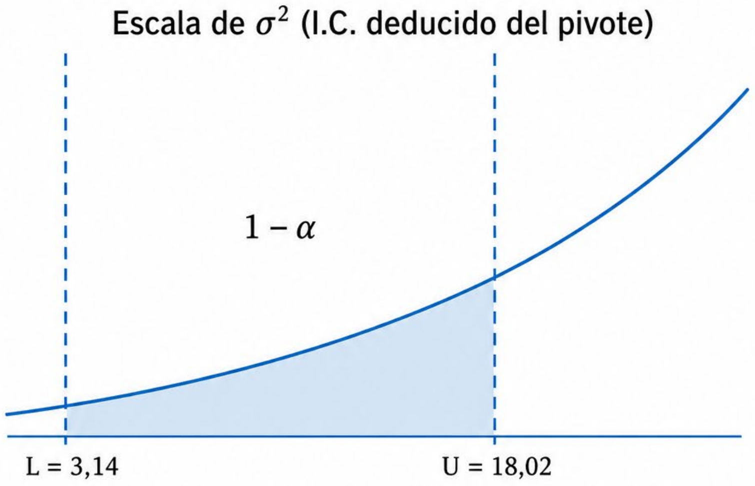
$$P\left(\frac{(n-1)S_1^2}{\chi^2_{\alpha/2;\ n-1}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S_1^2}{\chi^2_{(1-\alpha/2;\ n-1)}}\right) = 1-\alpha$$

3. **Resultado** $IC_{1-\alpha}(\sigma^2)$

$$\sigma^2 \in \left(\frac{(n-1)S_1^2}{\chi^2_{\alpha/2;n-1}}, \frac{(n-1)S_1^2}{\chi^2_{1-\alpha/2;n-1}}\right) ;\ \gamma = 1-\alpha$$

4. **I.C. para σ:** tomar raíz positiva en ambos extremos.





$P(\chi^2_{1-\alpha/2;\ 11} \le 11 \cdot S_1^2/\sigma^2 \le \chi^2_{\alpha/2;\ 11}) = 0{,}95$ (n = 12, S_1^2 = 6,25)

4.3 Caso $N(\mu, \sigma)$: I.C. para σ^2 (y para σ)

CORE

Una empresa de logística quiere estimar la variabilidad del tiempo de entrega (en horas) para un servicio estándar. Se asume que los tiempos siguen $N(\mu, \sigma)$. En una m.a.s. de n=12 entregas se obtiene $S_1^2 = 6,25$. Construye el I.C. bilateral del 95% para σ^2 y para σ.

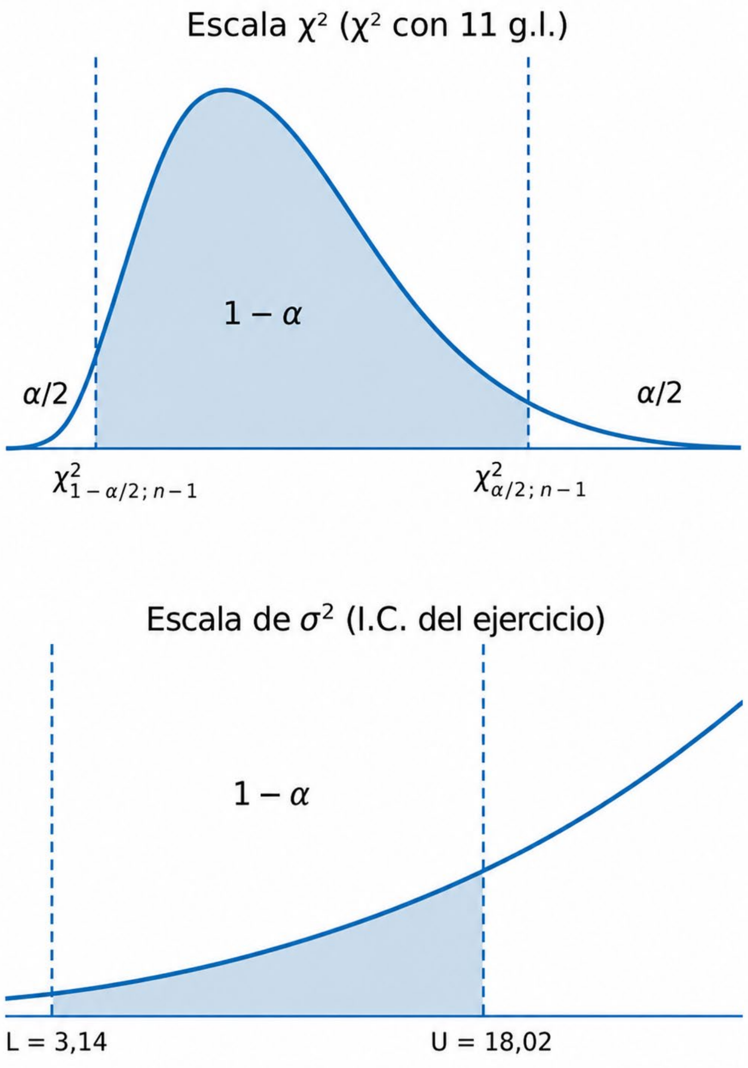
1. Resultado (I.C. para σ^2)

$$IC_{95\%}(\sigma^2) = \left(\frac{(n-1)S_1^2}{\chi^2_{0,975;\,11}}, \frac{(n-1)S_1^2}{\chi^2_{0,025;\,11}} \right) = \left(\frac{11 \cdot 6{,}25}{21{,}920}, \frac{11 \cdot 6{,}25}{3{,}816} \right) =$$

$$= [3{,}14; 18{,}02]\ horas^2$$

2. Resultado (I.C. para σ)

$$IC_{95\%}(\sigma) = \left[\sqrt{3{,}14}; \sqrt{18{,}02} \right] \approx [1{,}77; 4{,}24]\ horas$$



IC 95% para σ^2: [3,14 ; 18,02] (n = 12, S_1^2 = 6,25)

4.T2 Test rápido (χ^2 y variabilidad)

CORE

1. **El pivote para construir un I.C. de σ^2 en $N(\mu,\sigma)$ es:**
   a) $(\bar{x} - \mu) / (\sigma/\sqrt{n})$
   b) $(n-1)S_1^2 / \sigma^2$
   c) $\sigma^2 / ((n-1)S_1^2)$
   d) S_1 / σ

2. **En ese pivote, los grados de libertad son:**
   a) n
   b) $n+1$
   c) $n-1$
   d) Depende de μ

3. ***El I.C. para σ^2 en χ^2 suele ser:***
   a) simétrico en longitud (centrado)
   b) asimétrico en longitud (no centrado)
   c) siempre de longitud mínima
   d) unilateral por defecto

4. **Para obtener un I.C. de σ a partir del de σ^2:**
   a) se divide por 2
   b) se toma logaritmo
   c) se toma raíz en ambos extremos
   d) se resta $\bar{x}$

4.T2 Test rápido (χ^2 y variabilidad)

CORE

1. **El pivote para construir un I.C. de σ^2 en $N(\mu,\sigma)$ es:**
   a) $(\bar{x} - \mu) / (\sigma/\sqrt{n})$
   b) $(n-1)S_1^2 / \sigma^2$ ✅
   c) $\sigma^2 / ((n-1)S_1^2)$
   d) S_1 / σ

2. **En ese pivote, los grados de libertad son:**
   a) n
   b) $n+1$
   c) $n-1$ ✅
   d) Depende de μ

3. ***El I.C. para σ^2 en χ^2 suele ser:***
   a) simétrico en longitud (centrado)
   b) asimétrico en longitud (no centrado) ✅
   c) siempre de longitud mínima
   d) unilateral por defecto

   Nota: **es simétrico en probabilidad** (colas iguales)

4. **Para obtener un I.C. de σ a partir del de σ^2:**
   a) se divide por 2
   b) se toma logaritmo
   c) se toma raíz en ambos extremos ✅
   d) se resta $\bar{x}$

5. Intervalos de confianza en poblaciones no normales

5.2 Chebyshev: I.C. para μ con garantía mínima

CORE

- Supuesto mínimo: existe media μ y desviación típica σ (sin asumir forma de la distribución).
- Desigualdad de Chebyshev:

$$P(|\xi - \mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

- Aplicada a la media muestral $\bar{x}$ (si σ es conocida):

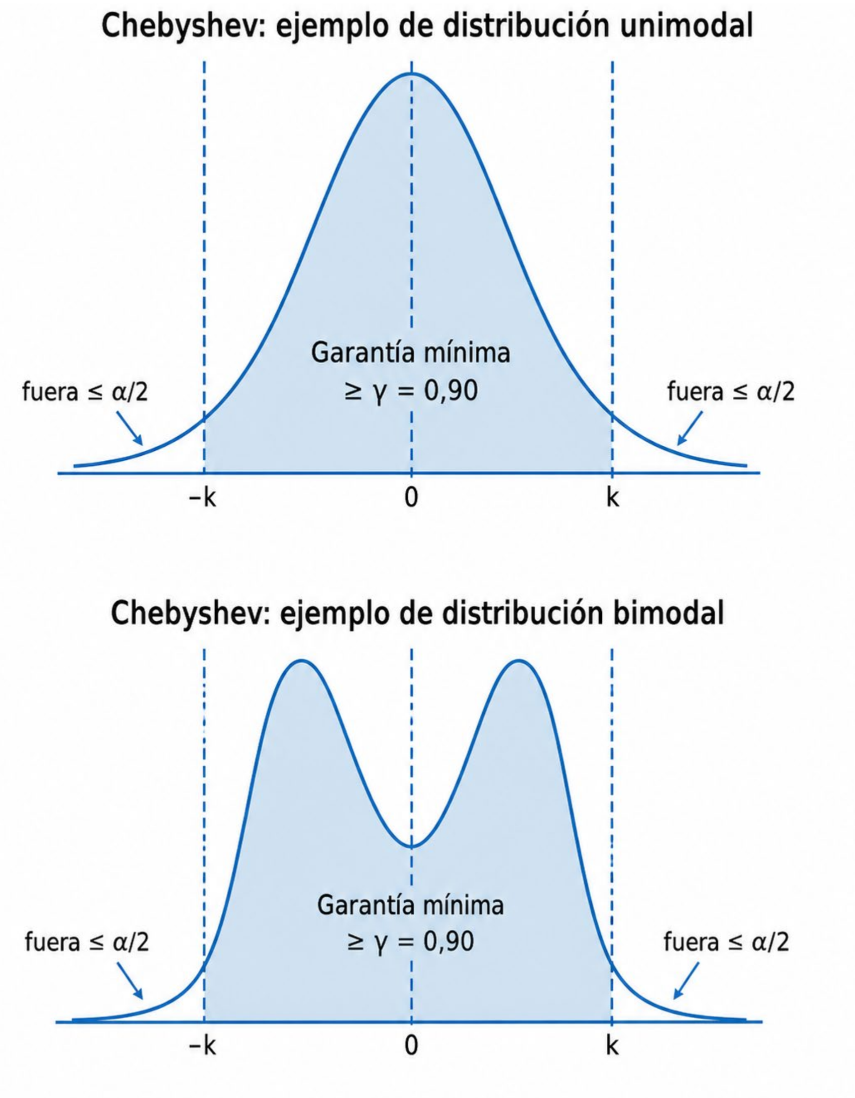
$$P\left(|\bar{x} - \mu| < k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

- Para garantizar un nivel γ, elegimos k tal que $1 - \frac{1}{k^2} = \gamma$, es decir

$$k = \sqrt{\frac{1}{1-\gamma}}$$

- Resultado (garantía al menos γ):

$$\mu \in \left[\bar{x} - k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \; con\ probabilidad \geq \gamma$$



Desigualdad de Chebyshev: $P(|X-\mu| < k\sigma) \geq 1 - 1/k^2$. Para $\gamma = 0{,}90 \Rightarrow k = \sqrt{1/(1-\gamma)} = 3{,}16$

5.2.1 Mini–ejemplo (Chebyshev)

CORE

- Una empresa estima el coste medio μ de un proceso. No se asume forma de la distribución, pero se conoce $\sigma = 30$ €. Muestra: $n = 36$, $\bar{x} = 120$ €. Queremos construir un intervalo para μ que contenga al parámetro con probabilidad al menos $\gamma = 0.90$.

1. Calcular k

$$k = \sqrt{\frac{1}{1-\gamma}} = \sqrt{\frac{1}{0{,}10}} = \sqrt{10} \approx 3{,}162$$

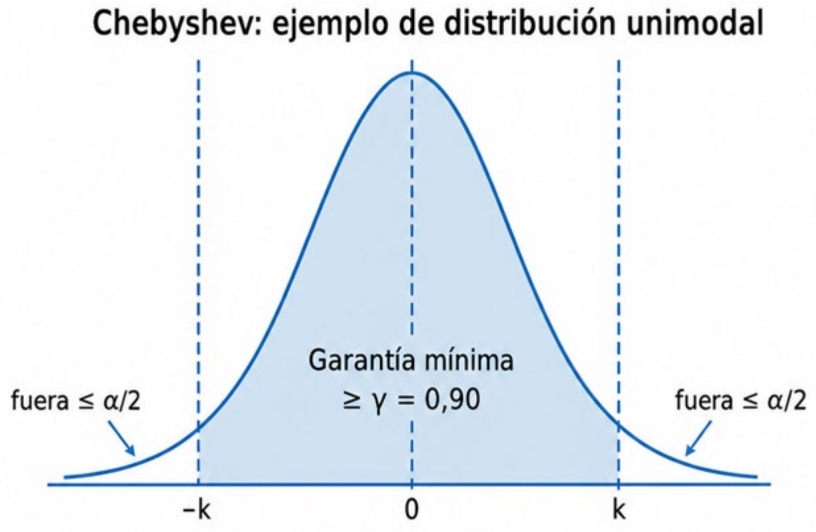
2. Semi-amplitud:

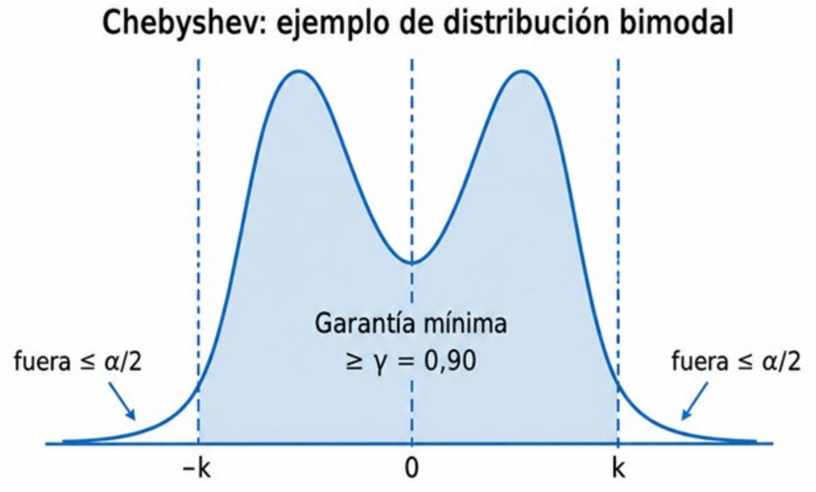
$$k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3{,}162\frac{30}{6} = 3{,}162 \cdot 5 \approx 15{,}81$$

3. Intervalo (cota $\gamma \geq 0{,}90$):

$$\mu \in [120 - 15{,}81; 120 + 15{,}81] = [104{,}19; 135{,}81]\,; \quad \gamma \geq 0{,}90$$

Idea clave: la **garantía** es “$\gamma \geq cota$” y **el intervalo suele ser más ancho** que en el caso normal.





Desigualdad de Chebyshev: $P(|X-\mu| < k\sigma) \geq 1 - 1/k^2$. Para $\gamma = 0{,}90 \Rightarrow k = \sqrt{1/(1-\gamma)} = 3{,}16$

5.3 Grandes muestras (MV): I.C. aproximado para θ

CORE

- En condiciones habituales, el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\theta}_{MV}$ es asintóticamente normal :

$$\hat{\theta}_{MV} \approx N\left(\theta, \sqrt{V\left(\hat{\theta}_{MV}\right)}\right)$$

- Equivalentemente, el pivote aproximado:

$$T(X;\theta) = \frac{\hat{\theta}_{MV} - \theta}{\sqrt{V\left(\hat{\theta}_{MV}\right)}} \approx N(0,1)$$

- En un I.C. bilateral estándar (colas iguales):

$$P\left(-z_{\alpha/2} \leq T(X;\theta) \leq z_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha$$

- Despejando θ : $IC_{1-\alpha}(\theta)$

$$\theta \in \left[\hat{\theta}_{MV} - z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{V}\left(\hat{\theta}_{MV}\right)} \;\; ; \; \hat{\theta}_{MV} + z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{V}\left(\hat{\theta}_{MV}\right)}\right]$$

- Importante: es un intervalo aproximado (mejora cuando n crece).

5.3.1 Ejercicio: I.C. aproximado por grandes muestras

CORE

- **Una cadena de supermercados quiere estimar el gasto medio θ=μ (en €) por cliente en compras online. Se toma una muestra grande de n=400 tickets y se obtiene:**
  - $\boldsymbol{\hat{\theta} = \bar{x} = 52,3}$ **€**
  - $\boldsymbol{S_1 = 18}$ **€ (cuasidesviación típica muestral).**
  - **Se pide: Construir un I.C. bilateral aproximado del 95% para θ.**
- **Solución (aprox. normal)**:

$$\hat{V}(\hat{\theta}) = \frac{S_1^2}{400} = \frac{18^2}{400} = \frac{324}{400} = 0{,}81 \rightarrow \sqrt{\hat{V}(\hat{\theta})} = \sqrt{0{,}81} = 0{,}9$$

$$z_{0{,}025} \approx 1{,}96, \qquad semi - amplitud = 1{,}96 \cdot 0{,}9 = 1{,}764$$

$$IC_{95\%}(\mu) = [52{,}3 \pm 1{,}764] = [50{,}54\,;54{,}06]$$

- **Interpretación**: intervalo aproximado (mejora con n grande)

5.4 Proporción π: I.C. aproximado (grandes muestras)

CORE

- **Contexto**: variable dicotómica (0/1). Parámetro: π
- **Estimador**: $\hat{\pi} = \bar{x} = p$ (proporción muestral)
- **Aproximación (n grande):**

$$\hat{\pi} \approx N\left(\pi, \sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}\right)$$

- **Sustituyendo $\boldsymbol{\pi}$ por $\boldsymbol{\hat{\pi}}$**:

$$IC_{1-\alpha}(\pi) = \left[\hat{\pi} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}}; \hat{\pi} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}}\right] = \left[\boldsymbol{p - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}; \boldsymbol{p + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right]$$

- **Condición práctica** (para que la aproximación sea razonable): $n\hat{\pi}$ y $n(1-\hat{\pi})$ “**suficientemente grandes**”.
  - **En ejercicios**: $n\hat{\pi} \geq 10$ y $n(1-\hat{\pi}) \geq 10$

5.4.1 Ejercicio: I.C. para una proporción π

CORE

Un banco quiere estimar la proporción de clientes que entran en mora en el primer año de un préstamo. En una muestra de n=500 préstamos, $x = 60$ entran en mora.

1. **Estimar π y construir el I.C. bilateral del 95% (aprox. grandes muestras).**
2. **Comprobar la condición: $\mathbf{n}\hat{\boldsymbol{\pi}} \geq \mathbf{10}$ y $\boldsymbol{n}(\mathbf{1} - \hat{\boldsymbol{\pi}}) \geq \mathbf{10}$**

- **Solución**:

$$\hat{\pi} = \frac{x}{n} = \frac{60}{500} = 0{,}12$$

- **Condición**:

$$n\hat{\pi} = 500 \cdot 0{,}12 = 60 \geq 10\,;\, n(1 - \hat{\pi}) = 500 \cdot 0{,}88 = 440 \geq 10$$

- **Desviación típica estimada**:

$$\sqrt{\hat{V}(\hat{\pi})} = \sqrt{\frac{\hat{\pi}(1 - \hat{\pi})}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}12 \cdot 0{,}88}{500}} \approx \sqrt{0{,}0002112} \approx 0{,}01453$$

- **Con** $\mathrm{z}_{0{,}025} = 1{,}96$:

$$semi - amplitud = 1{,}96 \cdot 0{,}01453 \approx 0{,}0285$$

$$IC_{95\%}(\pi) = [0{,}12 - 0{,}0285\,;\ 0{,}12 + 0{,}0285] = \ [0{,}0915\,; 0{,}1485]$$

(En porcentaje: $[9{,}15\%\,; 14{,}85\%]$)

5.T1 Test rápido (exacto / aproximado / garantía mínima)

CORE

1. **Si asumimos N(μ,σ) y σ es conocida, el I.C. para μ usando Z es:**
   a) garantía mínima
   b) aproximado
   c) exacto
   d) unilateral por defecto

2. **El I.C. de π basado en la aproximación normal es:**
   a) exacto siempre
   b) aproximado (mejora con n grande)
   c) garantía mínima
   d) independiente de n

3. **El intervalo obtenido con Chebyshev para μ tiene interpretación:**
   a) exacto con nivel γ
   b) aproximado con nivel γ
   c) contiene a μ con probabilidad al menos γ
   d) solo sirve si la distribución es normal

4. **La condición $np \geq 10$ y $n(1-p) \geq 10$ se usa para:**
   a) elegir entre t y χ^2
   b) justificar la aproximación normal en el I.C. de π
   c) calcular $\bar{x}$
   d) decidir si σ es conocida

5.T1 Test rápido (exacto / aproximado / garantía mínima)

CORE

1. **Si asumimos N(μ,σ) y σ es conocida, el I.C. para μ usando Z es:**
   a) garantía mínima
   b) aproximado
   c) exacto ✅
   d) unilateral por defecto

2. **El I.C. de π basado en la aproximación normal es:**
   a) exacto siempre
   b) aproximado (mejora con n grande) ✅
   c) garantía mínima
   d) independiente de n

3. **El intervalo obtenido con Chebyshev para μ tiene interpretación:**
   a) exacto con nivel γ
   b) aproximado con nivel γ
   c) contiene a μ con probabilidad al menos γ ✅
   d) solo sirve si la distribución es normal

4. **La condición $np \geq 10$ y $n(1-p) \geq 10$ se usa para:**
   a) elegir entre t y χ^2
   b) justificar la aproximación normal en el I.C. de π ✅
   c) calcular $\bar{x}$
   d) decidir si σ es conocida

6. Determinación del tamaño muestral

CORE

6.1 Tamaño muestral para estimar μ con σ^2 conocida en $N(\mu, \sigma)$

- **Objetivo**: **elegir $\boldsymbol{n}$** para que el I.C. **bilateral** de μ con nivel de **confianza $\boldsymbol{\gamma}$**, tenga semi-amplitud **(error máximo) $\boldsymbol{e}$**.
- En $N(\mu, \sigma)$ con σ conocida:

$$IC_{1-\alpha}(\mu)\colon \mu \in \left[\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right];\ \gamma = 1 - \alpha$$

- **Por tanto, la semi-amplitud es**:

$$e = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Despejando n:

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{e}\right)^2$$

(Se redondea hacia arriba al entero siguiente.)

6.1.1 Ejercicio: tamaño muestral para μ

CORE

Una empresa quiere estimar el coste medio μ (en €) de una operación. Se asume que la población se distribuye $N(\mu, \sigma)$ y se conoce $\sigma = 30$ €. Se desea un I.C. bilateral del 95% con error máximo (semi-amplitud) $e = 3$ € . Calcular el tamaño muestral mínimo n.

- **Solución** :

$$\alpha = 0{,}05\,; \quad z_{0{,}025} = 1{,}96;$$

$$n = \left(\mathrm{z}_{\alpha/2}\frac{\sigma}{e}\right)^2 = \left(1{,}96\frac{30}{3}\right)^2 = 19{,}6^2 = 384{,}16$$

- Redondeo hacia arriba :

$$n = 385$$

6.2 Tamaño muestral para estimar una proporción π

CORE

- **Objetivo**: **elegir n** para que el I.C. **bilateral** π, de con nivel de **confianza γ**, tenga semi-amplitud e.
- **Aproximación (grandes muestras):**

$$IC_{1-\alpha}(\pi): \pi \in \left[\hat{\pi} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}}; \hat{\pi} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})}{n}}\right]$$

- La semi-amplitud se aproxima por:

$$e = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\pi(1-\pi)}{n}}$$

- Despejando n

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2 \pi(1-\pi)}{e^2}$$

- Si π **es desconocida y no hay información previa, se usa el caso conservador**:

$$\pi(1-\pi) \leq 0{,}25 \ \rightarrow n = \frac{z_{\alpha/2}^2 \cdot 0{,}25}{e^2}$$

(Se redondea hacia arriba.)

6.2.1 Ejercicio: tamaño muestral para π

CORE

Una empresa de telecomunicaciones quiere estimar la proporción de clientes que se dan de baja en un trimestre. No hay información previa sobre π. Se desea un I.C. bilateral del 95% con error máximo e=0,03 (3 puntos porcentuales). Calcular el tamaño muestral mínimo n.

- **Solución** :

$$\alpha = 0{,}05\ ; \quad z_{0{,}025} = 1{,}96;$$

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2 \cdot 0{,}25}{e^2} = \frac{1{,}96^2 \cdot 0{,}25}{0{,}03^2} = \frac{3{,}8116 \cdot 0{,}25}{0{,}0009} = 1067{,}11$$

- Redondeo hacia arriba:

$$n = 1068$$

7. Guía rápida: elección del intervalo de confianza

7.1 Mapa de decisión (qué intervalo usar)

CORE

1) ¿Qué parámetro quieres estimar?

- μ (media)
- σ^2 / σ (variabilidad)
- π (proporción)

2) ¿Qué supuestos puedes hacer?

- Población $N(\mu, \sigma)$
- No normal / desconocida
- Tamaño muestral grande (aproximación)

3) Elegir el intervalo:

- $\boldsymbol{\mu}$ **en** $\boldsymbol{N(\mu, \sigma)}$
  - σ conocida → Z
  - σ desconocida → t_{n-1}
- $\boldsymbol{\sigma}^2$ **en** $\boldsymbol{N(\mu, \sigma)}$ → χ^2_{n-1}
- $\boldsymbol{\pi}$ → grandes muestras (aprox. normal) + comprobar $n\hat{\pi}$ y $n(1-\hat{\pi})$
- **Distribución desconocida** (sin modelo) → Chebyshev (garantía mínima)

7.2 Checklist final (construcción e interpretación)

CORE

1. Identifica el **parámetro poblacional desconocido** θ ($\mu, \sigma^2, \pi, \ldots$).
2. Fija la **distribución/supuesto** (Normal, grandes muestras, Chebyshev).
3. Elige el **pivote** y la **tabla** correspondiente (Z, t, χ^2).
4. **Determina α** y, si es **bilateral estándar**, usa **$\alpha/2$** en cada cola.
5. Construye el **intervalo** $[\theta_i(X), \theta_s(X)]$ y presenta el **intervalo numérico**.
6. **Interpreta correctamente**: "el método produce intervalos que contienen θ con nivel de confianza $\gamma = 1 - \alpha$".

7.3 Cierre del tema

CORE

- **Idea clave**: un intervalo de confianza es “estimación puntual + precisión”.
- $\gamma = 1 - \alpha$:
  - γ: nivel de confianza
  - α: mide la probabilidad de que el intervalo no contenga a θ.
- **Casos principales**:
  - μ: Z (σ conocida) / t (σ desconocida)
  - σ^2: χ^2
  - π: grandes muestras
  - distribución desconocida: Chebyshev (garantía mínima)

Recursos

Bibliografía:

- **Ruiz-Maya, L., Martín-Pliego López, F. J. (3.ª ed.). Fundamentos de Inferencia Estadística. Thomson–Paraninfo.**

Atribuciones y transparencia:

- **Gráficas** de este anexo: generadas con Python (SciPy/Matplotlib) con apoyo de ChatGPT.
- **Imágenes externas**: cuando se incluyen, se usan bajo licencia CC-BY / CC-BY-SA, citadas individualmente.