Tema 6-7-8. Contrastes de hipótesis

Cuadernillo de ejercicios resueltos con contexto económico

Estadística II · Grado en Economía · URJC

En este documento se mantiene la notación del curso: S^2 es la varianza muestral con divisor n y S_1^2 es la cuasivarianza muestral con divisor n−1. En los contrastes sobre medias con σ desconocida se trabaja con S_1 y con la distribución t de Student. Para proporciones se usa p para la proporción muestral y π para la proporción poblacional. Como norma de trabajo, en la variable aleatoria tipificada y en los cuantiles críticos se redondea a 2 decimales, y en las probabilidades a 4 decimales.

Versión docente elaborada a partir del esquema del tema 6-7-8, adaptada a las tablas de probabilidad y cuantiles críticos del curso.

1. Criterio de trabajo del cuadernillo

Antes de calcular conviene automatizar siempre la misma secuencia de decisión. La mayoría de los errores en contrastes no nacen de una mala cuenta, sino de identificar mal el parámetro, el sentido de la hipótesis alternativa o el procedimiento que corresponde.

- ¿Qué **parámetro** se contrasta? Media μ, media de diferencias μ_D, varianza/desviación típica σ^2 o σ, proporción π, diferencia de medias $\mu_X-\mu_Y$, diferencia de proporciones $\pi_1-\pi_2$ o igualdad de varianzas.
- ¿Hay una muestra, dos muestras independientes o datos apareados?
- ¿Qué supuestos tengo? σ conocida o desconocida, normalidad, igualdad de varianzas, normalidad aproximada de las diferencias, tamaño muestral grande o necesidad de un procedimiento exacto.
- ¿La alternativa es unilateral o bilateral?
- ¿Voy a decidir con región crítica, con p-valor o con ambas herramientas?

2. Lista de contenidos del cuadernillo

Bloque	Contenido	Ejercicios
I	Formulación de hipótesis, p-valor y elección del procedimiento	1-3
II	Contrastes sobre una media	4-7
III	Contrastes sobre una varianza o desviación típica	8-9
IV	Contrastes sobre una proporción	10-12
V	Contrastes sobre dos medias y medias apareadas	13-17
VI	Contrastes sobre dos proporciones	18-19
VII	Contraste de igualdad de varianzas	20-21
VIII	Relación entre contraste e intervalo de confianza	22-23

IX	Ejercicios de integración	24-27

3. Síntesis inicial: qué contraste usar

Caso	Parámetro	Supuesto clave	Procedimiento	Distribución bajo H_0
Una media	μ	Normal y σ conocida	z	N(0,1)
Una media	μ	Normal y σ desconocida	t	t(n−1)
Una varianza	σ^2 o σ	Normal	χ^2	$\chi^2(n-1)$
Una proporción	π	Muestra grande	z aproximado	N(0,1)
Una proporción	π	La regla práctica falla	Exacto binomial	Binomial $B(n,\pi_0)$
Dos medias	$\mu_X-\mu_Y$	σ_X y σ_Y conocidas	z	N(0,1)
Dos medias	$\mu_X-\mu_Y$	σ desconocidas pero iguales	t combinada	t(n+m−2)
Medias apareadas	μ_D	Datos emparejados; normalidad aproximada de las diferencias	t sobre diferencias	t(n−1)
Dos medias	$\mu_X-\mu_Y$	Muestras grandes	z aproximado	N(0,1)
Dos proporciones	$\pi_1-\pi_2$	Muestras grandes, H_0: $\pi_1=\pi_2$	z pooled	N(0,1)
Igualdad de varianzas	$\sigma_X^2=\sigma_Y^2$	Dos poblaciones normales	F	F(n−1,m−1)

4. Ejercicios resueltos

Bloque I. Formulación de hipótesis, p-valor y elección del procedimiento

Ejercicio 1. Formular H_0 y H_1 en contexto económico

CORE

Enunciado. Para cada situación, escríbanse la hipótesis nula y la alternativa con el sentido correcto. a) Una cadena de supermercados afirma que el importe medio de una cesta rápida sigue siendo 18 €. Se sospecha que ha aumentado. b) Una plataforma de reparto afirma que la proporción de entregas tardías no supera el 8%. Se sospecha que es mayor. c) Un banco quiere comprobar si la volatilidad diaria de un fondo ha cambiado respecto del valor de referencia 1,5%. d) Dos campañas de captación digital se comparan para saber si generan la misma tasa de conversión.

Solución

a) El parámetro es una media μ. Si se sospecha aumento, el planteamiento correcto es H_0: $\mu = 18$ frente a H_1: $\mu > 18$.

b) El parámetro es una proporción π. Si la empresa quiere vigilar que la tasa tardía no se haya disparado, el contraste es H_0: $\pi = 0{,}08$ frente a H_1: $\pi > 0{,}08$.

c) El parámetro es una variabilidad; puede expresarse como σ o σ^2. Como la sospecha es de cambio, el contraste es bilateral: H_0: $\sigma = 1{,}5\%$ frente a H_1: $\sigma \neq 1{,}5\%$.

d) El parámetro es la diferencia de proporciones $\pi_1-\pi_2$. Si se quiere contrastar igualdad, se formula H_0: $\pi_1 = \pi_2$ frente a H_1: $\pi_1 \neq \pi_2$.

Observación. La igualdad se formula en H_0; el sentido >, < o ≠ debe corresponder a la pregunta económica real, no a una intuición vaga.

Ejercicio 2. Lectura correcta del p-valor

CORE

Enunciado. En un contraste bilateral sobre una media se ha obtenido p-valor = 0,0321 con $\alpha = 0{,}05$. Interprétese el resultado en lenguaje estadístico y en lenguaje económico. Después indíquese qué ocurriría si se trabajase con $\alpha = 0{,}01$.

Solución

Como $p = 0{,}0321 < 0{,}05$, rechazamos H_0 al 5%. La muestra aporta evidencia estadísticamente significativa de que el parámetro difiere del valor planteado en H_0.

En lenguaje económico, los datos observados son poco compatibles con la hipótesis de que el indicador permanezca en su nivel de referencia; por tanto, hay evidencia de cambio.

Si se exigiese $\alpha = 0{,}01$, entonces $p = 0{,}0321 > 0{,}01$ y no rechazaríamos H_0. El mismo resultado muestral deja de ser suficiente bajo un criterio más exigente.

El p-valor no es la probabilidad de que H_0 sea cierta; es la probabilidad, suponiendo cierta H_0, de obtener un resultado al menos tan extremo como el observado.

Observación. No debe escribirse 'aceptamos H_0'; la formulación correcta es 'no rechazamos H_0'.

Ejercicio 3. Elegir el procedimiento adecuado

PLUS

Enunciado. Indíquese qué procedimiento corresponde en cada caso. a) Se quiere contrastar si el tiempo medio de preparación de pedidos ha bajado; la población puede suponerse normal y σ es desconocida. b) Se quiere contrastar si la desviación típica del rendimiento semanal de un activo es 2,1%; se asume normalidad. c) Se quiere comparar el gasto medio de dos grupos independientes, con muestras grandes. d) Se quiere contrastar si una tasa de impago supera el 4%, con $n = 18$ y $\pi_0 = 0{,}04$. e) Se quiere comparar si dos procesos tienen la misma varianza bajo normalidad. f) Se quiere contrastar si dos plataformas presentan la misma proporción de altas de pago con tamaños muestrales grandes.

Solución

a) Contraste t de Student sobre una media: una muestra, normalidad y σ desconocida.

b) Contraste χ^2 sobre σ o σ^2: una muestra y población normal.

c) Contraste z aproximado para $\mu_X - \mu_Y$ con muestras grandes.

d) No conviene el aproximado normal para una proporción porque $n\pi_0 = 0{,}72$ y $n(1-\pi_0) = 17{,}28$; falla claramente la regla práctica. Procede el contraste exacto binomial.

e) Contraste F de Fisher-Snedecor para igualdad de varianzas.

f) Contraste z para dos proporciones con estimación pooled bajo H_0: $\pi_1 = \pi_2$.

Observación. Este tipo de ejercicio es decisivo porque un método mal elegido arrastra todo el desarrollo posterior.

Bloque II. Contrastes sobre una media

Ejercicio 4. Una media con σ conocida

CORE

Enunciado. Una cadena de cafeterías quiere comprobar si el gasto medio por ticket en el turno de tarde supera los 40 €. Estudios previos permiten considerar conocida la desviación típica poblacional, $\sigma = 6$ €. En una muestra aleatoria simple de $n = 36$ tickets se obtiene $\bar{x} = 42{,}1$ €. Contrástese al 5% la hipótesis adecuada.

Solución

El parámetro es μ, el gasto medio por ticket. Como se sospecha aumento, formulamos H_0: $\mu = 40$ frente a H_1: $\mu > 40$.

Como σ es conocida, usamos el estadístico z.

$$Z = (\bar{x} - \mu_0) / (\sigma / \sqrt{n})$$

Sustituyendo: $z^* = (42{,}1 - 40) / (6/\sqrt{36}) = 2{,}10$.

Con $\alpha = 0{,}05$ y alternativa a derechas, el valor crítico es 1,64.

Como $z^* = 2{,}10 > 1{,}64$, rechazamos H_0.

También puede verse con el p-valor: $p = P(Z > 2{,}10) = 1 - P(Z <= 2{,}10) = 1 - 0{,}9821 = 0{,}0179$.

Conclusión económica: con un nivel de significación del 5%, la muestra aporta evidencia de que el gasto medio por ticket en el turno de tarde supera los 40 €.

Observación. Cuando σ es conocida, la clave no es recordar una fórmula aislada, sino justificar por qué el pivote adecuado es Z.

Ejercicio 5. Una media con σ desconocida y contraste bilateral

CORE

Enunciado. Una empresa logística estudia el tiempo medio de carga, en minutos, de una nueva rutina operativa. Se supone normalidad y se observa una muestra de $n = 25$ operaciones con $\bar{x} = 18.6$ y cuasidesviación típica muestral $S_1 = 3.2$. Se quiere contrastar si el tiempo medio sigue siendo 20 minutos, frente a la posibilidad de cambio, al 5%.

Solución

El parámetro es μ. El planteamiento es $H_0: \mu = 20$ frente a $H_1: \mu \neq 20$.

Como la población se supone normal y σ es desconocida, usamos t de Student con n−1 grados de libertad.

$$T = (\bar{x} - \mu_0) / (S_1 / \sqrt{n}), \quad \text{con} \quad T \sim t(n-1) \text{ bajo } H_0$$

El valor observado es $t^* = (18,6 - 20) / (3,2/\sqrt{25}) = -2,19$.

Con $\alpha = 0,05$ bilateral y 24 grados de libertad, el valor crítico es ±2,06.

Como $|t^*| = 2,19 > 2,06$, rechazamos H_0.

Con las tablas disponibles basta la comparación con el valor crítico; además, t* queda entre 2,06 y 2,49 en valor absoluto, por lo que $0,0250 < \text{p-valor} < 0,0500$.

Conclusión económica: la muestra aporta evidencia de que el tiempo medio de carga ha cambiado respecto de 20 minutos.

Observación. En un contraste bilateral, α se reparte en α/2 en cada cola.

Ejercicio 6. Una media con σ desconocida y alternativa a izquierdas

PLUS

Enunciado. Una asesoría fiscal ha implantado una nueva interfaz de trabajo. Antes de la implantación, el tiempo medio para tramitar una declaración sencilla era 5,8 minutos. Tras el cambio se toma una muestra de $n = 16$ expedientes, con $\bar{x} = 5.4$ y $S_1 = 0.8$. Suponiendo normalidad, ¿hay evidencia al 5% de que el tiempo medio se haya reducido?

Solución

El parámetro es μ. Como interesa verificar reducción, el contraste correcto es $H_0: \mu = 5,8$ frente a $H_1: \mu < 5,8$.

Usamos t de Student porque σ es desconocida y la población se supone normal.

$t^* = (5,4 - 5,8) / (0,8/\sqrt{16}) = -2,00$.

El valor crítico para $\alpha = 0,05$ a izquierdas y 15 grados de libertad es -1,75.

Como $t^* = -2,00 < -1,75$, rechazamos H_0.

Con estas tablas no es necesario calcular un p-valor exacto; la decisión queda determinada por la región crítica.

Conclusión económica: con un 5% de significación, la muestra sugiere que la nueva interfaz reduce el tiempo medio de tramitación.

Observación. En un contraste unilateral hay que cuidar mucho el sentido del signo; con la misma cuenta, una alternativa mal formulada cambia por completo la decisión.

Ejercicio 7. Una media con σ conocida: p-valor y potencia

PLUS

Enunciado. Una entidad de medios de pago quiere comprobar si el importe medio de una compra financiada supera los 50 €. Se conoce la desviación típica poblacional, $\sigma = 8$ €. En una muestra aleatoria simple de $n = 64$ operaciones se obtiene $\bar{x} = 52,5$ €. a) Contrástese al 5% la hipótesis adecuada y calcúlese el p-valor. b) Calcúlese la potencia del contraste si en realidad $\mu = 53$ €.

Solución

El parámetro es μ. Como interesa comprobar si el importe medio supera el valor de referencia, planteamos H_0: $\mu = 50$ frente a H_1: $\mu > 50$.

Como σ es conocida, usamos un contraste z sobre una media.

$Z = (\bar{x} - \mu_0) / (\sigma / \sqrt{n})$

Sustituyendo: $z^* = (52,5 - 50) / (8/\sqrt{64}) = 2,50$.

Con $\alpha = 0,05$ y alternativa a derechas, el valor crítico es 1,64.

Como $z^* = 2,50 > 1,64$, rechazamos H_0.

El p-valor es $p = P(Z > 2,50) = 1 - P(Z <= 2,50) = 1 - 0,9938 = 0,0062$.

Conclusión económica: la evidencia muestral sugiere que el importe medio de las compras financiadas supera los 50 €.

Para calcular la potencia cuando $\mu = 53$, trabajamos con la media muestral bajo esa alternativa. La región crítica es $\bar{x} > 50 + 1,64\cdot(8/\sqrt{64}) = 51,64$.

Si en realidad $\mu = 53$, entonces $\bar{x} \sim N(53, 8/\sqrt{64})$. Por tanto,

Potencia = $P(\bar{x} > 51,64 \mid \mu = 53) = P(Z > -1,36) = P(Z <= 1,36) = 0,9131$.

La potencia es, aproximadamente, 0,9131. En estas condiciones, el contraste tiene una probabilidad cercana al 91,31% de detectar el aumento cuando el verdadero valor medio es 53 €.

Observación. El p-valor mide compatibilidad de la muestra con H_0; la potencia mide capacidad del procedimiento para detectar una alternativa concreta.

Bloque III. Contrastes sobre una varianza o desviación típica

Ejercicio 8. Contraste sobre la desviación típica: aumento de variabilidad

CORE

Enunciado. Una comercializadora eléctrica controla la desviación típica mensual del coste unitario de compra en el mercado mayorista. Históricamente se considera aceptable $\sigma = 2.0$ €/MWh. En una muestra de $n = 20$ meses se obtiene $S_1 = 2.8$. Suponiendo normalidad, contrástese al 5% si la variabilidad ha aumentado.

Solución

El parámetro es σ. La hipótesis adecuada es H_0: $\sigma = 2,0$ frente a H_1: $\sigma > 2,0$.
Bajo normalidad, el contraste se formula mediante χ^2.

$$\chi^2 = (n-1)\, S_1^{\,2} / \sigma_0^{\,2}, \quad con \quad \chi^2 \sim \chi^2(n-1) \text{ bajo } H_0$$

El valor observado es $\chi^{2*} = (19 \cdot 2{,}8^2) / 2{,}0^2 = 37{,}24$.

Con $\alpha = 0{,}05$ y 19 grados de libertad, el punto crítico superior es 30,14.

Como $\chi^{2*} = 37{,}24 > 30{,}14$, rechazamos H_0.

Con estas tablas no se necesita un p-valor exacto para resolver el ejercicio; la decisión se obtiene por comparación con el valor crítico.

Conclusión económica: la dispersión del coste unitario parece haberse incrementado de forma significativa respecto del estándar histórico.

Observación. En estos ejercicios no basta con decir 'ha subido S_1'; hay que valorar si la subida observada es o no compatible con la variación muestral esperable bajo H_0.

Ejercicio 9. Contraste bilateral sobre la variabilidad

PLUS

Enunciado. Una fintech sigue la desviación típica diaria del retorno de una cartera automatizada. El valor de referencia es $\sigma = 1.2\%$. Con una muestra de $n = 15$ días se obtiene $S_1 = 1.7\%$. Suponiendo normalidad, contrástese al 5% si la variabilidad ha cambiado.

Solución

El planteamiento bilateral es H_0: $\sigma = 1{,}2$ frente a H_1: $\sigma \neq 1{,}2$.

El estadístico observado es $\chi^{2*} = (14 \cdot 1{,}7^2)/1{,}2^2 = 28{,}10$.

Con 14 grados de libertad y $\alpha = 0{,}05$ bilateral, la región de no rechazo queda entre 5,63 y 26,12.

Como $\chi^{2*} = 28{,}10$ cae fuera de ese intervalo, rechazamos H_0.

Con las tablas χ^2 puede verse además que el estadístico cae por encima del crítico superior del 2,5%, así que la decisión es clara al 5% bilateral.

Conclusión económica: los datos apuntan a un cambio significativo en la variabilidad de la cartera respecto del valor de referencia.

Observación. En un contraste bilateral sobre σ o σ^2, la distribución χ^2 no es simétrica; por eso conviene escribir con claridad la región de no rechazo antes de decidir.

Bloque IV. Contrastes sobre una proporción

Ejercicio 10. Una proporción con aproximación normal

CORE

Enunciado. Una plataforma de comercio electrónico afirma que al menos el 72% de los pedidos se entrega en menos de 24 horas. En una muestra aleatoria de $n = 250$ pedidos, 193 llegaron a tiempo. Contrástese al 5% si la proporción real supera el 72%.

Solución

El parámetro es π. Se formula H_0: $\pi = 0{,}72$ frente a H_1: $\pi > 0{,}72$.

La proporción muestral es $p = 193/250 = 0{,}7720$.

Comprobamos la regla práctica bajo H_0: $n\pi_0 = 180{,}0$ y $n(1-\pi_0) = 70{,}0$; ambos valores superan 10, así que la aproximación normal es razonable.

$$Z = (p - \pi_0) / \sqrt{[\pi_0(1-\pi_0)/n]}$$

El valor observado es $z^* = 1{,}83$.

Con $\alpha = 0{,}05$ a derechas, $z_{0,95} = 1{,}64$.

Como $z^* = 1{,}83 > 1{,}64$, rechazamos H_0.

Si se desea, también puede calcularse el p-valor: $p = P(Z > 1{,}83) = 1 - P(Z <= 1{,}83) = 1 - 0{,}9664 = 0{,}0336$.

Conclusión económica: la muestra proporciona evidencia de que la proporción de entregas en 24 horas supera el 72%.

Observación. En contrastes de una proporción, el denominador del estadístico se construye con π_0, no con p.

Ejercicio 11. Una proporción con muestra grande: p-valor y potencia

PLUS

Enunciado. Una aseguradora analiza si la proporción de pólizas contratadas íntegramente por vía digital supera el 40%. En una muestra aleatoria de n = 400 nuevas pólizas, 178 se contrataron por vía digital. a) Contrástese al 5% la hipótesis adecuada y calcúlese el p-valor. b) Calcúlese la potencia del contraste si en realidad $\pi = 0{,}46$.

Solución

El parámetro es π. Si se quiere comprobar si la contratación digital supera el 40%, se formula H_0: $\pi = 0{,}40$ frente a H_1: $\pi > 0{,}40$.

La proporción muestral es $p = 178/400 = 0{,}4450$.

La regla práctica se cumple bajo H_0, ya que $n\pi_0 = 160$ y $n(1-\pi_0) = 240$. Por tanto, procede el contraste z aproximado para una proporción.

$Z = (p - \pi_0) / \sqrt{[\pi_0(1-\pi_0)/n]}$

El valor observado es $z^* = 1{,}84$.

Con $\alpha = 0{,}05$ a derechas, el valor crítico es $z_{0,95} = 1{,}64$.

Como $z^* = 1{,}84 > 1{,}64$, rechazamos H_0.

El p-valor es $p = P(Z > 1{,}84) = 1 - P(Z <= 1{,}84) = 1 - 0{,}9671 = 0{,}0329$.

Conclusión económica: la muestra aporta evidencia de que la proporción de contratación digital supera el 40%.

$p > 0{,}40 + 1{,}64\cdot\sqrt{(0{,}24/400)} = 0{,}4402$.

Si en realidad $\pi = 0{,}46$, aproximamos p mediante una normal de media 0,46 y desviación típica $\sqrt{[0{,}46\cdot 0{,}54/400]}$. Entonces,

Potencia = $P(p > 0{,}4402 \mid \pi = 0{,}46) = P(Z > -0{,}80) = P(Z <= 0{,}80) = 0{,}7881$.

La potencia es aproximadamente 0,7881. En estas condiciones, el procedimiento detectaría una proporción real del 46% en torno al 78,81% de las veces.

Observación. En proporciones, la región crítica se fija con π_0, mientras que la potencia se evalúa bajo una alternativa concreta π_1.

Ejercicio 12. Contraste exacto binomial

PLUS

Enunciado. Un banco digital evalúa si la proporción de clientes que activan un nuevo sistema antifraude supera el 60%. En una muestra piloto de n = 12 clientes, 10 lo activan. Dado el tamaño muestral, contrástese al 5% la hipótesis H_0: π = 0,60 frente a H_1: π > 0,60.

Solución

La regla práctica no es convincente para usar la aproximación normal con seguridad en una muestra tan pequeña; procede el contraste exacto binomial.

Bajo H_0, el número X de activaciones sigue una B(12, 0,60).

Como la alternativa es a derechas, el p-valor exacto es P(X ≥ 10) bajo H_0.

Calculando la cola superior, p = P(X ≥ 10) = 0,0834.

Como p = 0,0834 > 0,05, no rechazamos H_0.

Conclusión económica: aunque la proporción observada es alta, la evidencia muestral aún no es suficiente para afirmar al 5% que más del 60% activan el sistema.

Observación. El contraste exacto binomial no se introduce por capricho: aparece cuando la aproximación normal deja de ser fiable.

Bloque V. Contrastes sobre dos medias y medias apareadas

Ejercicio 13. Dos medias con desviaciones típicas conocidas

CORE

Enunciado. Dos formatos de tienda se comparan para estudiar el gasto medio por compra. En el formato A se observa una muestra de n = 40 tickets con media 15.2; en el formato B, una muestra de m = 50 tickets con media 14.1. Se conocen las desviaciones típicas poblacionales: σ_X = 2.4 y σ_Y = 2.0. Contrástese al 5% si el gasto medio del formato A supera al del formato B.

Solución

El parámetro es $\mu_X-\mu_Y$. La hipótesis es H_0: $\mu_X-\mu_Y = 0$ frente a H_1: $\mu_X-\mu_Y > 0$.

Como ambas desviaciones típicas poblacionales son conocidas, procede un contraste z para dos medias independientes.

$$Z = [(\bar{x} - \bar{y}) - 0] / \sqrt{(\sigma_X^2/n + \sigma_Y^2/m)}$$

El valor observado es z* = 2,32.

Con α = 0,05 a derechas, el valor crítico es 1,64.

Como z* = 2,32 > 1,64, rechazamos H_0.

También aquí puede calcularse el p-valor con la tabla normal: p = P(Z > 2,32) = 1 − P(Z <= 2,32) = 1 − 0,9898 = 0,0102.

Conclusión económica: la evidencia apunta a que el formato A genera un gasto medio por compra superior al del formato B.

Observación. La independencia entre muestras y el conocimiento de σ_X y σ_Y son las dos claves de este procedimiento.

Ejercicio 14. Dos medias con varianzas desconocidas pero iguales

CORE

Enunciado. Una empresa compara la facturación media diaria, en miles de euros, de dos equipos comerciales. Se consideran razonables la normalidad y la igualdad de varianzas. Para el equipo A se tiene $n = 18$, $\bar{x} = 72$ y $S_{1x} = 6$; para el equipo B, $m = 16$, $\bar{y} = 68$ y $S_{1Y} = 5$. Contrástese al 5% si las medias difieren.

Solución

El parámetro es $\mu_x - \mu_Y$. La formulación es H_0: $\mu_x - \mu_Y = 0$ frente a H_1: $\mu_x - \mu_Y \neq 0$.

Como σ_x y σ_Y son desconocidas pero se asumen iguales, usamos t combinada con varianza agrupada.

$$S\_p^2 = [\,(n-1)S_{1x}^{\,2} + (m-1)S_{1Y}^{\,2}\,] \,/\, (n+m-2)$$

$S\_p^2 = 30{,}84$ y, por tanto, $S\_p = 5{,}55$.

$$T = [(\bar{x} - \bar{y}) - 0] \,/\, [\,S\_p\,\sqrt{(1/n + 1/m)}\,]$$

El valor observado es $t^* = 2{,}10$ con 32 grados de libertad.

El valor crítico bilateral al 5% es $\pm 2{,}04$.

Como $|t^*| = 2{,}10 > 2{,}04$, rechazamos H_0.

Además, como t^* queda entre 2,04 y 2,45 en valor absoluto, puede situarse el p-valor en el intervalo $0{,}0250 < p < 0{,}0500$.

Conclusión económica: existe evidencia de que los equipos presentan facturaciones medias diarias distintas.

Observación. Cuando se trabaja con t combinada, conviene mostrar explícitamente el cálculo de la varianza agrupada.

Ejercicio 15. Medias apareadas: contraste t sobre la media de las diferencias

CORE

Enunciado. Una cadena minorista quiere comprobar si un nuevo sistema de reposición reduce el número medio semanal de horas de rotura de stock. En 10 establecimientos se mide la misma tienda antes y después de implantar el sistema. Se define D = horas antes − horas después. En la muestra se obtiene $n = 10$, $\bar{D} = 1{,}8$ y $S_{1D} = 2{,}4$ horas. Suponiendo normalidad aproximada de las diferencias, contrástese con $\alpha = 0{,}05$ si el nuevo sistema reduce el tiempo medio de rotura de stock.

Solución

El parámetro relevante no es $\mu_x - \mu_Y$ para dos muestras independientes, sino μ_D, la media poblacional de las diferencias antes−después.

Como una mejora implica $D > 0$, se formula H_0: $\mu_D = 0$ frente a H_1: $\mu_D > 0$.

Al tratarse de datos apareados y σ_D desconocida, usamos un contraste t de Student sobre la muestra de diferencias.

$T = (\bar{D} - \mu_{D},0) \,/\, (S_{1D} \,/\, \sqrt{n})$, con $T \sim t(n-1)$ bajo H_0

El valor observado es $t^* = 1{,}8 \,/\, (2{,}4/\sqrt{10}) = 2{,}37$.

Con $\alpha = 0{,}05$ a derechas y 9 grados de libertad, el valor crítico es 1,83.

Como $t^* = 2{,}37 > 1{,}83$, rechazamos H_0.

Con estas tablas no hace falta calcular un p-valor exacto; basta la comparación con el valor crítico.

Conclusión económica: con un nivel de significación del 5%, la muestra aporta evidencia de que el nuevo sistema reduce el tiempo medio semanal de rotura de stock.

Observación. La clave didáctica es transformar el problema en una sola muestra de diferencias. Si se tratase como dos muestras independientes, se perdería la información del emparejamiento y el procedimiento sería incorrecto.

Ejercicio 16. Dos medias con muestras grandes

PLUS

Enunciado. Dos plataformas de suscripción quieren comparar el tiempo medio mensual de permanencia, en meses, de sus usuarios premium. En la plataforma A se observa $n = 80$, $\bar{x} = 31.4$, $S_{1x} = 8.5$; en la plataforma B, $m = 75$, $\bar{y} = 33.1$, $S_{1Y} = 7.9$. Con tamaños muestrales grandes, contrástese al 10% si la permanencia media en A es menor que en B.

Solución

El parámetro es $\mu_x - \mu_Y$. El planteamiento es H_0: $\mu_x - \mu_Y = 0$ frente a H_1: $\mu_x - \mu_Y < 0$.

Al tratarse de dos muestras grandes, puede emplearse la aproximación normal usando las cuasidesviaciones típicas muestrales.

$$Z = [(\bar{x} - \bar{y}) - 0] / \sqrt{(S_{1x}^2/n + S_{1Y}^2/m)}$$

El valor observado es $z^* = -1{,}29$.

Con $\alpha = 0{,}10$ a izquierdas, el valor crítico es $-1{,}28$.

Como $z^* = -1{,}29 < -1{,}28$, rechazamos H_0.

El p-valor aproximado es $p = P(Z < -1{,}29) = 1 - P(Z <= 1{,}29) = 1 - 0{,}9015 = 0{,}0985$.

Conclusión económica: al 10% de significación, la plataforma A muestra una permanencia media inferior a la de la plataforma B.

Observación. En este caso la asimetría del planteamiento importa: la pregunta no es si difieren, sino si A queda por debajo de B.

Ejercicio 17. Elegir bien entre los casos de dos medias

PLUS

Enunciado. Clasifíquense correctamente los siguientes tres escenarios. No es necesario realizar cálculos numéricos; sí justificar en una frase el procedimiento. a) Dos muestras independientes, normalidad, σ_x y σ_Y conocidas. b) Dos muestras independientes, normalidad, σ desconocidas y se asume igualdad de varianzas. c) Dos muestras independientes grandes, sin necesidad de suponer normalidad estricta.

Solución

a) Corresponde un contraste z para $\mu_x - \mu_Y$ con desviaciones típicas poblacionales conocidas.

b) Corresponde un contraste t para $\mu_x - \mu_Y$ con varianza agrupada y $n+m-2$ grados de libertad.

c) Corresponde un contraste z aproximado de grandes muestras para $\mu_x - \mu_Y$.

La decisión no depende de gustos formales, sino del tipo de información disponible sobre la dispersión y del tamaño muestral.

Observación. En este bloque conviene distinguir con precisión entre 'σ conocida', 'σ desconocida e igual' y 'muestras grandes'.

Bloque VI. Contrastes sobre dos proporciones

Ejercicio 18. Dos proporciones: diferencia bilateral

CORE

Enunciado. Dos versiones de una página de pago se comparan en una prueba A/B. En la versión A convierten 54 de 300 usuarios; en la versión B, 34 de 280. Contrástese al 5% si las tasas de conversión difieren.

Solución

El parámetro es $\pi_1-\pi_2$. La hipótesis es H_0: $\pi_1 = \pi_2$ frente a H_1: $\pi_1 \neq \pi_2$.

Las proporciones muestrales son $p_1 = 0{,}1800$ y $p_2 = 0{,}1214$.

Bajo H_0 se usa la estimación pooled: $p = (54+34)/(300+280) = 0{,}1517$.

$$Z = (p_1 - p_2) / \sqrt{[\, p(1-p)(1/n_1 + 1/n_2)\,]}$$

“Como el valor exacto del estadístico es $z*\approx 1{,}9648$, al redondear a dos decimales queda en el umbral 1,96. Siguiendo la regla habitual $|z*| \geq z$_crítico, se rechaza $H0$.”

El valor observado es $z^* = 1{,}96$.

Con $\alpha = 0{,}05$ bilateral, el valor crítico es $\pm 1{,}96$.

Como $|z^*| = 1{,}96 = 1{,}96$, el resultado queda justo en el umbral; tomando la regla habitual $|z^*| \geq$ z crítico, rechazamos H_0.

El p-valor aproximado es $p = 2 \cdot P(Z > 1{,}96) = 2 \cdot [1 - P(Z <= 1{,}96)] = 2 \cdot (1 - 0{,}9750) = 0{,}0500$.

Conclusión económica: las dos versiones de la página presentan tasas de conversión significativamente distintas.

Observación. En el contraste de igualdad de proporciones, el pooled se calcula bajo H_0: $\pi_1 = \pi_2$.

Ejercicio 19. Dos proporciones: superioridad de una campaña

PLUS

Enunciado. Una empresa compara dos campañas de captación. En la campaña 1 se consiguen 246 altas de pago entre 420 impactos útiles; en la campaña 2, 212 altas entre 400 impactos. Contrástese al 5% si la campaña 1 tiene una tasa de alta superior.

Solución

El parámetro es $\pi_1-\pi_2$. Se plantea H_0: $\pi_1 = \pi_2$ frente a H_1: $\pi_1 > \pi_2$.

Las proporciones observadas son $p_1 = 0{,}5857$ y $p_2 = 0{,}5300$.

La proporción pooled es $p = 0{,}5585$.

El estadístico observado es $z^* = 1{,}61$.

Con $\alpha = 0{,}05$ a derechas, el valor crítico es 1,64.

Como $z^* = 1{,}61 < 1{,}64$, no rechazamos H_0.

El p-valor aproximado es $p = P(Z > 1{,}61) = 1 - P(Z <= 1{,}61) = 1 - 0{,}9463 = 0{,}0537$.

Conclusión económica: la evidencia empírica no es suficiente, al 5%, para afirmar que la campaña 1 obtiene una tasa de alta superior a la campaña 2.

Observación. La diferencia relevante no es solo estadística: debe expresarse también en términos del mejor rendimiento de la campaña.

Bloque VII. Contraste de igualdad de varianzas

Ejercicio 20. Igualdad de varianzas: contraste bilateral

CORE

Enunciado. Se comparan dos líneas de producción para estudiar la estabilidad del peso neto de un producto. Bajo normalidad, una muestra de la línea A da $S_{1X} = 4{,}1$ con n = 14, y una muestra de la línea B da $S_{1Y} = 2{,}9$ con m = 12. Contrástese al 10% si las varianzas difieren.

Solución

La hipótesis es H_0: $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ frente a H_1: $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$.

Tomamos en el numerador la cuasivarianza mayor para trabajar con la cola superior de la F.

$$F = S_{1X}^2 / S_{1Y}^2$$

El valor observado es F* = 2,00.

Con α = 0,10 bilateral y grados de libertad (13, 11), la región de no rechazo queda entre 0,38 y 2,76.

Como F* = 2,00 pertenece a ese intervalo, no rechazamos H_0.

Conclusión económica: la evidencia disponible no permite afirmar que las dos líneas presenten varianzas distintas.

Observación. En F es muy recomendable escribir los grados de libertad y aclarar qué muestra queda en el numerador.

Ejercicio 21. Igualdad de varianzas: alternativa a derechas

PLUS

Enunciado. Dos métodos de tasación automatizada se comparan por su estabilidad. Del método A se obtiene $S_{1a} = 3.6$ con n = 20; del método B, $S_{1B} = 2.4$ con m = 18. Suponiendo normalidad, contrástese al 5% si el método A es más variable que el B.

Solución

La hipótesis adecuada es H_0: $\sigma_a^2 = \sigma_B^2$ frente a H_1: $\sigma_a^2 > \sigma_B^2$.

$$F = S_{1a}^2 / S_{1B}^2$$

El valor observado es F* = 2,25.

Con α = 0,05 a derechas y grados de libertad (19, 17), el valor crítico es 2,24.

Como F* = 2,25 > 2,24, rechazamos H_0.

Con las tablas F del curso no es necesario calcular un p-valor exacto; la decisión se obtiene comparando con el valor crítico.

Conclusión económica: el método A presenta una variabilidad significativamente mayor que el método B.

Observación. La alternativa unilateral sobre varianzas aparece menos veces en clase, pero exige el mismo cuidado con el sentido del contraste.

Bloque VIII. Relación entre contraste e intervalo de confianza

Ejercicio 22. Contraste bilateral e intervalo de confianza con σ conocida

CORE

Enunciado. El gasto medio mensual en publicidad de un grupo de pymes se quiere comparar con el valor histórico μ_0 = 100 miles de euros. Se conoce $\sigma = 12$ y, con una muestra de $n = 64$ empresas, se observa $\bar{x} = 102$. Resuélvase el contraste bilateral al 5% y verifíquese la decisión mediante el intervalo de confianza del 95%.

Solución

El contraste es H_0: $\mu = 100$ frente a H_1: $\mu \neq 100$.

El estadístico observado es $z^* = 1{,}33$.

Como $|z^*| = 1{,}33 < 1{,}96$, no rechazamos H_0 al 5%.

Construimos ahora el intervalo de confianza bilateral del 95% para μ con σ conocida.

$$IC_{95}\%(\mu) = \bar{x} \pm z_{0{,}975} \cdot \sigma/\sqrt{n}$$

El intervalo es [99,06 ; 104,94].

Como 100 pertenece al intervalo, la decisión coincide con la del contraste bilateral: no rechazamos H_0.

Conclusión económica: el gasto medio mensual sigue siendo compatible con el valor histórico de 100 miles de euros.

Observación. La equivalencia directa entre contraste bilateral e intervalo de confianza se usa mucho como comprobación rápida.

Ejercicio 23. Contraste bilateral e intervalo de confianza con t

PLUS

Enunciado. Un servicio de atención al cliente analiza si el tiempo medio de resolución sigue siendo 7 horas. Con una muestra de $n = 20$ incidencias se obtiene $\bar{x} = 7.8$ y $S_1 = 1.5$. Suponiendo normalidad, resuélvase el contraste bilateral al 5% y compárese con el intervalo de confianza del 95%.

Solución

Se plantea H_0: $\mu = 7$ frente a H_1: $\mu \neq 7$.

El estadístico t observado es 2,39 con 19 grados de libertad.

Como $|t^*| = 2{,}39 > 2{,}09$, rechazamos H_0.

No hace falta un p-valor exacto: con 19 grados de libertad, $2{,}09 < |t^*| < 2{,}86$ implica $0{,}0100 < p < 0{,}0500$.

Calculamos ahora el intervalo de confianza del 95% para μ usando t de Student.

$$IC_{95}\%(\mu) = \bar{x} \pm t_{0{,}975};n-1 \cdot S_1/\sqrt{n}$$

El intervalo es [7,10 ; 8,50].

Como 7 no pertenece al intervalo, la decisión es coherente con el contraste bilateral: rechazamos H_0.

Conclusión económica: la muestra ofrece evidencia de que el tiempo medio de resolución ha cambiado y, en concreto, se sitúa por encima de 7 horas.

Observación. La relación contraste-intervalo funciona especialmente bien para ordenar ideas cuando el ejercicio mezcla decisión e interpretación.

Bloque IX. Ejercicios de integración

Ejercicio 24. Decidir si procede un exacto binomial

PLUS

Enunciado. Una aseguradora quiere saber si la proporción de clientes que aceptan una nueva cláusula digital supera el 75%. En una muestra de $n = 18$ clientes, 16 la aceptan. Decídase primero si procede el contraste normal aproximado y resuélvase después el problema con el método correcto al 5%.

Solución

El parámetro es π y el planteamiento natural es $H_0: \pi = 0,75$ frente a $H_1: \pi > 0,75$.

Antes de elegir el procedimiento, comprobamos la regla práctica bajo H_0: $n\pi_0 = 13,5$ y $n(1-\pi_0) = 4,5$.

Como $n(1-\pi_0)$ no alcanza 10, no conviene usar la aproximación normal.

Procede el contraste exacto binomial, con $X \sim B(18, 0,75)$ bajo H_0.

El p-valor exacto es $P(X \geq 16) = 0,1353$.

Como $0,1353 > 0,05$, no rechazamos H_0.

Conclusión económica: la muestra es favorable, pero todavía no permite asegurar al 5% que la aceptación supere el 75%.

Observación. La secuencia correcta es: primero validar si el aproximado es razonable; solo después calcular.

Ejercicio 25. Selección y resolución de un contraste sobre una media

PLUS

Enunciado. Una empresa de paquetería quiere verificar si un nuevo algoritmo de rutas eleva el número medio de entregas por repartidor y jornada por encima de 10,5. Se dispone de una muestra aleatoria de $n = 22$ jornadas con $\bar{x} = 11.3$ y $S_1 = 1.9$. La distribución del indicador puede considerarse normal. Resuélvase al 5%.

Solución

El parámetro es μ. La formulación adecuada es $H_0: \mu = 10,5$ frente a $H_1: \mu > 10,5$.

Como hay una sola muestra, normalidad y σ desconocida, corresponde un contraste t de Student.

El valor observado es $t^* = 1,97$.

El valor crítico a derechas con $\alpha = 0,05$ y 21 grados de libertad es 1,72.

Como $t^* = 1,97 > 1,72$, rechazamos H_0.

No hace falta un p-valor exacto; como $1,72 < t^* < 2,08$, puede situarse $0,0250 < p < 0,0500$.

Conclusión económica: la evidencia indica que el nuevo algoritmo eleva el promedio de entregas por jornada por encima de 10,5.

Observación. Este ejercicio obliga a encadenar bien las decisiones: una muestra, media, σ desconocida, normalidad y alternativa a derechas.

Ejercicio 26. Dos medias con interpretación de signo

PLUS

Enunciado. Dos operadores telefónicos se comparan por el tiempo medio, en euros por cliente y mes, de gasto adicional en servicios premium. Para el operador A se observa n = 22, $\bar{x}$ = 44,8, S_{1X} = 5,4; para el operador B, m = 20, $\bar{y}$ = 47,1, S_{1Y} = 5,1. Suponiendo normalidad e igualdad de varianzas, contrástese al 5% si el gasto medio adicional en A es inferior al de B.

Solución

El parámetro es $\mu_X-\mu_Y$. La formulación correcta es H_0: $\mu_X-\mu_Y = 0$ frente a H_1: $\mu_X-\mu_Y < 0$.

La desviación agrupada es S_p = 5,26.

El estadístico observado es t* = -1,42 con 40 grados de libertad.

El valor crítico a izquierdas es -1,68.

Como t* = -1,42 > -1,68, no rechazamos H_0.

Con estas tablas no es necesario calcular un p-valor exacto; la muestra no aporta evidencia suficiente al 5%.

Conclusión económica: la muestra no proporciona evidencia suficiente de que el gasto medio adicional en el operador A sea inferior al del operador B.

Observación. Cuando la alternativa es $\mu_X-\mu_Y < 0$, el signo del estadístico debe leerse con mucha atención.

Ejercicio 27. Clasificación integral de la casuística del tema

PLUS

Enunciado. Para cada uno de los apartados siguientes, identifíquese el parámetro, la hipótesis alternativa y el procedimiento correcto. No se piden cuentas numéricas, pero sí una justificación breve. a) Un fondo quiere saber si la desviación típica de su rentabilidad diaria ha disminuido respecto del 1,8% bajo normalidad. b) Dos comercios comparan la proporción de devoluciones con muestras de 500 y 520 ventas. c) Un departamento analiza si el número medio de reclamaciones por día ha cambiado respecto del histórico, con una muestra de 28 días, normalidad y σ desconocida. d) Una startup compara el tiempo medio de conversión de dos embudos independientes con n = 90 y m = 95 observaciones.

Solución

a) Parámetro: σ. Alternativa: H_1: σ < 1,8%. Procedimiento: χ^2 unilateral a izquierdas, porque se contrasta la variabilidad de una población normal.

b) Parámetro: $\pi_1-\pi_2$. Alternativa: H_1: $\pi_1 \neq \pi_2$ si se habla de comparar, o unilateral si se habla de superioridad. Procedimiento: z para dos proporciones con pooled bajo H_0, ya que las muestras son grandes.

c) Parámetro: μ. Alternativa: H_1: $\mu \neq \mu_0$, porque se pregunta si ha cambiado. Procedimiento: t de Student para una media con σ desconocida.

d) Parámetro: $\mu_X-\mu_Y$. La alternativa depende del problema concreto; si solo se pregunta si difieren, sería bilateral. Procedimiento: z aproximado para dos medias con muestras grandes.

Este ejercicio resume el mapa de decisión final del tema: parámetro, número de muestras, supuestos y sentido de la alternativa.

Observación. La clasificación correcta de los casos es la mejor comprobación de que el alumno domina la casuística completa.

5. Errores frecuentes que conviene evitar

- Escribir 'aceptamos H_0' en lugar de 'no rechazamos H_0'.
- Formular mal la alternativa y, por tanto, leer la cola equivocada.
- Usar z cuando en realidad corresponde t porque σ es desconocida.
- Olvidar comprobar la regla práctica en contrastes sobre proporciones.
- Emplear p en el denominador del contraste de una proporción cuando debe usarse π_0.
- Confundir bilateral con unilateral al repartir α.
- Olvidar los grados de libertad en χ^2, t y F.
- Redactar la conclusión sin el sentido económico del problema ni las unidades correspondientes.

6. Bibliografía recomendada

Casella, G., & Berger, R. L. (2002). Statistical Inference (2nd ed.). Duxbury.

Newbold, P., Carlson, W. L., & Thorne, B. (2013). Statistics for Business and Economics (8th ed.). Pearson.

Ruiz-Maya, L., & Martín-Pliego López, F. J. Fundamentos de Inferencia Estadística (3.ª ed.). Thompson-Paraninfo.